ÜBER
DIE BESTIMMUNG DER BAHN EINES HIMMELSKÖRPERS
AUS DREI BEOBACHTUNGEN

VON

PROF. DR. E. WEISS,
W. M. K. AKAD.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 4. MAI 1893.)

§. 1.
Vorbemerkungen.

Im zweiten Buche der »Theoria motus« entwickelt Gauss seine berühmte Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, und stellt sich dabei die Aufgabe, ohne irgend welche Voraussetzung als die, dass das Gestirn die Sonne in einem Kegelschnitte umkreise, eine Bahn zu ermitteln, welche die vorgelegten Beobachtungen vollständig darstellt. Um dieser Forderung in aller Strenge zu genügen, untersucht Gauss zunächst, welche Grösse zweckmässiger Weise als Unbekannte in das Problem einzuführen ist, und wie man sich Näherungswerthe für dieselbe verschaffen kann. Sodann zeigt er, wie man in einem bestimmten Stadium der Rechnung ohne grossen Zeitaufwand die kleinen, von der Aberration und Parallaxe herrührenden Correctionen berücksichtigen kann, und endlich, wie man durch ein methodisches Vorgehen schrittweise den wahren Werth der Unbekannten erreicht, und damit zu jener Bahn gelangt, welche den gestellten Anforderungen völlig entspricht.

Wenn nun auch die Methode von Gauss wegen der Eleganz ihrer Entwicklungen und der streng logischen Durchführung in allen ihren Theilen in theoretischer Beziehung wohl für immer das Vorbild einer mustergiltigen, von echt mathematischem Geiste durchwehten Lösung eines schwierigen Problemes bleiben wird, lässt sich doch die Frage aufwerfen, ob bei ersten Bahnbestimmungen in praktischer Beziehung die Forderung einer vollständigen Darstellung aller drei Beobachtungen geboten und zweckmässig ist. Diese Frage dürfte heute um so berechtigter erscheinen, als seit Gauss' Zeiten die Praxis bei Bahnbestimmungen von Gliedern unseres Sonnensystemes sich wesentlich geändert hat. Denn bis vor wenigen Decennien berechnete man eine Bahn in der Regel nur aus drei Beobachtungen, welche man dafür als die geeignetsten der vorhandenen hielt, und betrachtete diese Bahn bereits als eine »definitive«, indem die übrigen Beobachtungen entweder gar nicht, oder blos zu dem Ende mit ihr verglichen wurden, um darzuthun, dass sie dieselben genügend darstelle. Heutzutage indess leitet man sich eine Bahn aus drei Beobachtungen lediglich zu dem Zwecke ab, um das Gestirn bequem verfolgen zu können, oder um sich die Grundlagen zur Ermittlung einer definitiven Bahn aus allen überhaupt angestellten Beobachtungen zu verschaffen. Eine derartige Bahn hat daher in unseren Tagen nur mehr einen provisorischen, ganz

temporären Charakter; es muss desshalb um so wünschenswerther erscheinen, an Stelle der strengen Lösung der Aufgabe eine genäherte, rascher zum Ziele führende treten zu lassen, je häufiger die Forderung einer solchen Bahnbestimmung an den Astronomen herantritt.

Bei Kometen hat man diesen Weg auch längst eingeschlagen, und es ist dadurch bereits unter Olbers' Meisterhand das Problem der Berechnung einer Kometenbahn zu einem in wenig Stunden lösbaren geworden. Für Bahnberechnungen ohne bestimmte Voraussetzung über die Excentricität lag aber bis zur Mitte unseres Jahrhundertes kein Grund vor, eine Vereinfachung von Gauss' Methode anzustreben; es wurde daher erst als sich die Asteroiden-Entdeckungen häuften, eine erheblichere Modification an den Rechnungsvorschriften von Gauss durch Encke[1] vorgenommen. Während nämlich Gauss die Berechnung der Elemente aus den Radienvectoren ohne Zuhilfenahme der geocentrischen Distanzen durchführt, berechnet Encke zuerst diese, und dann aus ihnen die Elemente, wodurch eine Reihe von Vorarbeiten entbehrlich werden. Eine weitere Abkürzung erreicht er dadurch, dass er das Verhältniss (η) des Sectors zum Dreieck in eine Reihe entwickelt und damit die Auflösung einer Gleichung 3. Grades, sowie das Berechnen einer Correctionsgrösse (ξ), für welche beiden Operationen Gauss allerdings sehr bequeme Hilfstafeln gegeben hat, und endlich auch noch die indirecte Berechnung der Differenz der excentrischen Anomalien $\left(\sin^2\frac{g}{2}\right)$ umgeht. Einige Jahre später hat Hansen[2] das Verhältniss des Sectors zum Dreiecke durch eine Reihe auszudrücken gelehrt, die wesentlich rascher convergirt und bequemer zu berechnen ist, als die von Encke, und dadurch diesen Theil der Arbeit noch erheblich erleichtert. Seither hat man eigenthümlicher Weise nicht mehr versucht, die Berechnung einer elliptischen Bahn noch weiter zu vereinfachen; es concentrirte sich im Gegentheile das Bestreben darauf, rascher convergirende Methoden als die Gauss'sche aufzufinden.

Der erste, der diesen Weg betrat, war v. Oppolzer, der im Jahre 1869 im ersten Bande seines trefflichen Lehrbuches der Bahnbestimmung eine Methode entwickelte und in der zweiten Auflage dieses Bandes weiter ausbildete, die gleich in der ersten Hypothese ein Reihenglied mehr als Gauss berücksichtigt; sie führt indess zu so complicirten und zeitraubenden Rechnungen, dass sie sich selbst nach den Modificationen und Umstellungen, die Tietjen an ihr angebracht hat,[3] wohl nie allgemeiner wird einbürgern können. Ein zweiter derartiger Versuch wurde vor Kurzem von Gibbs unternommen, welcher durch eine ebenso originelle wie scharfsinnige Analyse das Verhältniss der Dreiecksflächen durch sehr einfache Ausdrücke bis auf vierte Potenzen der Zeit genau darstellen lehrte, und das von ihm aufgefundene Prinzip auch sofort zur Aufstellung einer neuen Methode der Bahnbestimmung verwerthete.[4] Allein seine Formeln sind noch weitläufiger als die von Oppolzer, und derart gestellt, dass wohl Jedem, der einmal nach ihnen gerechnet, die Lust vergehen dürfte, das Experiment zu wiederholen. Diesem Übelstande haben Rob. Vogel[5] und W. Fabritius[6] in sehr lesenswerthen Memoiren zu steuern versucht, und viel geschmeidigere Rechnungsvorschriften entwickelt; trotzdem wird aber meiner Ansicht nach der Umstand, dass die Methode von Oppolzer die Bestimmung von zwei Unbekannten $\left(r_3+r_1 \text{ und } \frac{r_3-r_1}{r_3+r_1}\right)$, die von Gibbs aber sogar von dreien (r_1, r_2 und r_3) erfordert, während bei der Methode von Gauss nur eine (r_2) zu ermitteln kommt, der letzteren stets die Superiorität in Bezug auf Kürze sichern, wenn

[1] Encke, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. Berliner Jahrbuch für 1854, S. 316.

[2] Hansen, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Ber. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1863, S. 83.

[3] F. Tietjen, Berliner Jahrbuch für 1887.

[4] W. Gibbs, On the determination of elliptic orbits from three complete observations. Mem. of the Nation. Acad. of Sciences, IV, 2, p. 79.

[5] Rob. Vogel, Eine Methode für Bahnbestimmungen. Astron. Nachr. 129, 37.

[6] W. Fabritius, Über eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Principes von Gibbs. Astron. Nachr. 128, 225 — und: Weitere Anwendungen des Gibbs'schen Principes. Astron. Nachr. 128, 321.

man sie nur nicht auf erste Bahnbestimmungen unter Verhältnissen anwendet, die höchstens ein theoretisches Interesse beanspruchen können, praktisch aber gar keine Bedeutung besitzen. Dazu zähle ich unter Anderem das berühmte Ceres-Beispiel der Theoria motus, welches bei einem Zeitintervalle von 260 Tagen zwischen den äussersten Beobachtungen wegen seiner langsamen Annäherung zur Wahrheit den Anstoss zum Aufsuchen von rascher convergirenden Methoden gegeben zu haben scheint. Dabei dürfte indess ein Missverständniss der Intentionen von Gauss obwalten. Denn schon der Umstand, dass er die bereits lange vorher von ihm selbst aus drei Oppositionen (1802, 1803 und 1804) hergeleiteten Elemente der Ceres nur zur Berechnung der Parallaxe und Aberration verwendet, im Übrigen aber vollständig ignorirt, würde — auch wenn er es nicht überdies noch ausdrücklich hervorgehoben hätte — genugsam darthun, dass er kein praktisch nachahmenswerthes Beispiel geben, sondern nur den Kunstgriff erläutern wollte, dessen man sich zur Abkürzung der Rechnung bedienen kann, falls ja einmal eine erste Bahnbestimmung unter so ungünstigen Verhältnissen vorgenommen werden müsste, dass man seiner bedarf. Dies bestätigen auch eine Reihe anderer Aussprüche in der Theoria motus, unter Anderem das bei der Exposition seiner Methode im Artikel 134 Gesagte.

In den folgenden Blättern habe ich nun, gestützt auf unsere bisherigen Erfahrungen über die gewöhnlichen Bahnverhältnisse jener Classe von Himmelskörpern, welcher derjenige angehört, dessen Elemente zu suchen sind, zunächst die Grösse der einzelnen in Betracht kommenden Glieder erörtert, um jene herauszufinden, die man bei ersten Bahnbestimmungen vernachlässigen kann, ohne befürchten zu müssen, dass die zu Grunde gelegten Beobachtungen nicht innerhalb der Grenzen ihrer Unsicherheit dargestellt würden. Durch Weglassen dieser, sowie des Weiteren durch Einführen zweckmässiger Hilfsgrössen und durch eine Umstellung der Ausdrücke, vermöge welcher man aus dem mittleren Radiusvector fast ohne Rechnung die geocentrischen Distanzen der äussersten Orte erhält, bin ich zu Formeln gelangt, nach denen man die heliocentrischen Coordinaten des Gestirnes beinahe ebenso rasch erhält, wie bei Olbers' Methode. Von da an gestaltet sich die weitere Berechnung der Elemente fast genau so wie bisher; ist daher bei einer Ellipse beträchtlich weitläufiger als bei einer Parabel, was aber so sehr in der Natur der Sache liegt, dass es kaum je wird umgangen werden können.

Bei diesen Untersuchungen kam mir der Umstand zu statten, dass es mir gelungen ist, die Determinante K (Gleichung C und 2) des Gleichungssystemes derart umzuformen, dass sich in jeder der drei Fundamentalgleichungen ein Factor erster Ordnung wegheben lässt. Durch diese Vereinfachung sind die Formeln so compendiös und durchsichtig geworden, dass es keinen Schwierigkeiten unterliegt, die für eine Bahnbestimmung massgebenden Verhältnisse ganz allgemein zu discutiren, über welche, wie sich an den betreffenden Stellen zeigen wird, auch jetzt noch manche Vorstellungen herrschen, die einer Rectification bedürfen. Ein weiterer Vortheil des einfacheren Baues der Gleichungen besteht auch darin, dass, wenn man nachträglich noch Glieder höherer Ordnung in die Rechnung einbeziehen will, dies jederzeit ohne erheblichen Zeitaufwand geschehen kann.

§. 2.

Aufstellung der Fundamentalgleichungen.

Zählt man die Längen von einem Punkte mit der Länge Π an, so lauten die drei Fundamentalgleichungen zur Bahnbestimmung:

$$
\text{A)}\quad \left\{
\begin{aligned}
& n_1\rho_1'\cos(\lambda_1-\Pi)-n_2\rho_2'\cos(\lambda_2-\Pi)+n_3\rho_3'\cos(\lambda_3-\Pi) = \\
& \qquad = n_1R_1\cos(L_1-\Pi)-n_2R_2\cos(L_2-\Pi)+n_3R_3\cos(L_3-\Pi) \\
& n_1\rho_1'\sin(\lambda_1-\Pi)-n_2\rho_2'\sin(\lambda_2-\Pi)+n_3\rho_3'\sin(\lambda_3-\Pi) = \\
& \qquad = n_1R_1\sin(L_1-\Pi)-n_2R_2\sin(L_2-\Pi)+n_3R_3\sin(L_3-\Pi) \\
& n_1\rho_1'\operatorname{tg}\beta_1-n_2\rho_2'\operatorname{tg}\beta_2+n_3\rho_3'\operatorname{tg}\beta_3 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

In diesen Gleichungen bedeuten ρ_1', ρ_2', ρ_3' die curtirten Distanzen des Himmelskörpers von der Erde, n_1, n_2, n_3 die doppelten Flächenräume der Dreiecke zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten und dem ersten und zweiten Radiusvector; die übrigen Bezeichnungen sind die allgemein üblichen und bedürfen keiner Erläuterung.

Betrachtet man in diesen Gleichungen ρ_1', ρ_2' und ρ_3' als die Unbekannten, und löst man sie nach diesen auf, so fällt bekanntlich der Winkel II von selbst aus, und man erhält:

$$\text{B)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2}\,.\,K\rho_1' &= \frac{n_1}{n_2}a_1 - b_1 + \frac{n_3}{n_2}c_1 \\ K\rho_2' &= \frac{n_1}{n_2}a_2 - b_2 + \frac{n_3}{n_2}c_2 \\ \frac{n_3}{n_2}\,.\,K\rho_3' &= \frac{n_1}{n_2}a_3 - b_3 + \frac{n_3}{n_2}c_3. \end{aligned}\right.$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$\text{C)}\quad K = \sin(\lambda_3-\lambda_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - \sin(\lambda_3-\lambda_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3.$$

$$\text{D)}\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= R_1[\sin(\lambda_2-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2] \\ b_1 &= R_2[\sin(\lambda_2-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2] \\ c_1 &= R_3[\sin(\lambda_2-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_2] \\ a_2 &= R_1[\sin(\lambda_1-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1] \\ b_2 &= R_2[\sin(\lambda_1-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1] \\ c_2 &= R_3[\sin(\lambda_1-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_3 - \sin(\lambda_3-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_1] \\ a_3 &= R_1[\sin(\lambda_1-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 - \sin(\lambda_2-L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1] \\ b_3 &= R_2[\sin(\lambda_1-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 - \sin(\lambda_2-L_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1] \\ c_3 &= R_3[\sin(\lambda_1-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 - \sin(\lambda_2-L_3)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]. \end{aligned}\right.$$

Um diese Ausdrücke zusammenzuziehen, führen wir die nachstehenden Hilfsgrössen ein:

$$\text{E)}\quad \left\{\begin{aligned} q_1\sin Q_1 &= -\sin\lambda_3 + \sin\lambda_2\,\mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_2 \\ q_1\cos Q_1 &= -\cos\lambda_3 + \cos\lambda_2\,\mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_2 \\ q_2\sin Q_2 &= -\sin\lambda_3 + \sin\lambda_1\,\mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 \\ q_2\cos Q_2 &= -\cos\lambda_3 + \cos\lambda_1\,\mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 \\ q_3\sin Q_3 &= +\sin\lambda_1 - \sin\lambda_2\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_2 \\ q_3\cos Q_3 &= +\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_2. \end{aligned}\right.$$

Für die numerische Berechnung bequemer ist die folgende Schreibweise derselben:

$$\text{1)}\quad \left\{\begin{aligned} q_1\sin(Q_1-\lambda_2) &= \sin(\lambda_2-\lambda_3) \\ q_1\cos(Q_1-\lambda_2) &= -\cos(\lambda_2-\lambda_3) + \mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_2 \\ q_2\sin(Q_2-\lambda_1) &= \sin(\lambda_1-\lambda_3) \\ q_2\cos(Q_2-\lambda_1) &= -\cos(\lambda_1-\lambda_3) + \mathrm{tg}\,\beta_3\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 \\ q_3\sin(Q_3-\lambda_2) &= \sin(\lambda_1-\lambda_2) \\ q_3\cos(Q_3-\lambda_2) &= +\cos(\lambda_1-\lambda_2) - \mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_2. \end{aligned}\right.$$

Man hat nun:

$$\text{2)}\quad K\,\mathrm{ctg}\,\beta_2 = q_1q_3\sin(Q_1-Q_3) = q_2q_3\sin(Q_2-Q_3) = q_1q_2\sin(Q_1-Q_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_3.$$

$$
\text{D*)}\begin{cases}
a_1 = R_1 q_1 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_1-L_1) & a_2 = R_1 q_2 \operatorname{tg}\beta_1 \sin(Q_2-L_1) & a_3 = R_1 q_3 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_3-L_1)\\
b_1 = R_2 q_1 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_1-L_2) & b_2 = R_2 q_2 \operatorname{tg}\beta_1 \sin(Q_2-L_2) & b_3 = R_2 q_3 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_3-L_2)\\
c_1 = R_3 q_1 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_1-L_3) & c_2 = R_3 q_2 \operatorname{tg}\beta_1 \sin(Q_2-L_3) & c_3 = R_3 q_3 \operatorname{tg}\beta_2 \sin(Q_3-L_3).
\end{cases}
$$

Dies in die Gleichung B) substituirt, liefert:

$$
3)\begin{cases}
\dfrac{n_1}{n_2}\rho_1'.q_3 \sin(Q_1-Q_3) = \dfrac{n_1}{n_2}R_1 \sin(Q_1-L_1) - R_2 \sin(Q_1-L_2) + \dfrac{n_3}{n_2}R_3 \sin(Q_1-L_3)\\[2ex]
\rho_2'.\dfrac{q_1 q_3}{q_2}\operatorname{tg}\beta_2 \operatorname{ctg}\beta_1 \sin(Q_1-Q_3) = \dfrac{n_1}{n_2}R_1 \sin(Q_2-L_1) - R_2 \sin(Q_2-L_2) + \dfrac{n_3}{n_2}R_3 \sin(Q_2-L_3)\\[2ex]
\dfrac{n_3}{n_2}\rho_3'.q_1 \sin(Q_1-Q_3) = \dfrac{n_1}{n_2}R_1 \sin(Q_3-L_1) - R_2 \sin(Q_3-L_2) + \dfrac{n_3}{n_2}R_3 \sin(Q_3-L_3).
\end{cases}
$$

Mit Benützung der bekannten Relation:

$$N_1 R_1 \sin(Q-L_1) - N_2 R_2 \sin(Q-L_2) + N_3 R_3 \sin(Q-L_3) = 0,$$

in welcher $N_1\, N_2\, N_3$ die gleiche Bedeutung für die Erde, wie $n_1\, n_2\, n_3$ für den andern Himmelskörper haben, kann man das Gleichungssystem 3) auch in das nachstehende umformen:

$$
4)\begin{cases}
\dfrac{n_1}{n_2}\rho_1' q_3 \sin(Q_1-Q_3) = \left(\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{N_1}{N_2}\right)R_1 \sin(Q_1-L_1) + \left(\dfrac{n_3}{n_2}-\dfrac{N_3}{N_2}\right)R_3 \sin(Q_1-L_3)\\[2ex]
\rho_2'.\dfrac{q_1 q_3}{q_2}\dfrac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\sin(Q_1-Q_3) = \left(\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{N_1}{N_2}\right)R_1 \sin(Q_2-L_1) + \left(\dfrac{n_3}{n_2}-\dfrac{N_3}{N_2}\right)R_3 \sin(Q_2-L_3)\\[2ex]
\dfrac{n_3}{n_2}\rho_3' q_1 \sin(Q_1-Q_3) = \left(\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{N_1}{N_2}\right)R_1 \sin(Q_3-L_1) + \left(\dfrac{n_3}{n_2}-\dfrac{N_3}{N_2}\right)R_3 \sin(Q_3-L_3).
\end{cases}
$$

Die Bedeutung der Hilfsgrössen q_1, q_2, q_3 und Q_1, Q_2, Q_3 ist unschwer zu erkennen. Bezeichnet man nämlich mit J und Ω Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens eines durch die Punkte $\lambda_a\, \beta_a$ und $\lambda_b\, \beta_b$ gehenden grössten Kreises, so ist bekanntlich:

$$\operatorname{tg} J \sin(\Omega-\lambda_a) = \operatorname{tg}\beta_a$$
$$\operatorname{tg} J \sin(\Omega-\lambda_b) = \operatorname{tg}\beta_b,$$

oder auch:

$$\sin(\lambda_a-\lambda_b)\operatorname{tg} J \sin\Omega = \sin\lambda_a \operatorname{tg}\beta_b - \sin\lambda_b \operatorname{tg}\beta_a$$
$$\sin(\lambda_a-\lambda_b)\operatorname{tg} J \cos\Omega = \cos\lambda_a \operatorname{tg}\beta_b - \cos\lambda_b \operatorname{tg}\beta_a.$$

Nennt man also $J_1\, \Omega_1$, $J_2\, \Omega_2$ und $J_3\, \Omega_3$ Neigung und Länge der aufsteigenden Knoten der durch den zweiten und dritten, den ersten und dritten und den ersten und zweiten beobachteten Ort des Himmelskörpers gelegten grössten Kreise, so erhellt aus einer Vergleichung der Relationen E) mit unserer letzten Gleichung sofort, dass ist:

$$
\text{E*)}\begin{cases}
q_1 = \sin(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{ctg}\beta_2 \operatorname{tg} J_1 & Q_1 = \Omega_1\\
q_2 = \sin(\lambda_1-\lambda_3)\operatorname{ctg}\beta_1 \operatorname{tg} J_2 & Q_2 = \Omega_2\\
q_3 = \sin(\lambda_2-\lambda_1)\operatorname{ctg}\beta_2 \operatorname{tg} J_3 & Q_3 = \Omega_3.
\end{cases}
$$

Die hier eingeführten Hilfsgrössen sind auch sehr geschickt, die Grössenordnung der einzelnen Glieder der Fundamentalgleichungen B) festzustellen. Denn aus dem Systeme 1) ersieht man unmittelbar, dass die q von der Grössenordnung der geocentrischen Bewegung des Gestirnes in den Zwischenzeiten sind, also von der ersten, wenn dessen Bewegung als eine Grösse dieser Ordnung betrachtet wird. Dieselbe Grössenordnung kommt vermöge D*) auch den a, b, c zu, wenn nicht etwa die Q den L sehr nahe

kommen, wo sie zu einer höheren Ordnung ansteigen. Dies tritt der Bedeutung der Q zufolge dann ein, wenn die grössten durch die beobachteten Orte gelegten Kreise nahe am Sonnenorte vorbeiziehen. Da ferner bei mässigen geocentrischen Bewegungen die Orte von einem grössten Kreise nie besonders stark abweichen können, sind die Differenzen der aufsteigenden Knoten der durch sie gelegten grössten Kreise im Allgemeinen auch nur klein; es wird daher die Determinante K des Gleichungssystemes nach 2) in der Regel von der dritten Ordnung sein, nicht selten aber auch einer höheren angehören.

Die Gleichung 2) bietet eine treffliche Probe für die Berechnung der Hilfsgrössen q und Q dar, die umso erwünschter ist, als deren Ermittlung eines der ersten und unangenehmsten Stadien der Rechnung bildet.

Die Coëfficienten der curtirten Distanzen können wegen der zwischen den verschiedenen q und Q stattfindenden Beziehungen [Gleichung 2)] auch in anderer Form geschrieben werden. So ist namentlich der Coëfficient von ρ_2':

$$\frac{q_1 q_3}{q_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \sin(Q_1 - Q_3) = q_3 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \sin(Q_2 - Q_3) = q_1 \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_3} \sin(Q_1 - Q_2).$$

Ich habe indessen die obige Form gewählt, weil $Q_1 - Q_3$, wenn das Gestirn nicht gerade eine Schlinge macht, der grösste Bogen ist, und deshalb die sicherste Berechnung gewährt. Ferner habe ich die erste und letzte Gleichung der Systeme 3) und 4) nicht auf ρ_1' und ρ_3', sondern auf $\frac{n_1}{n_2}\rho_1'$ und $\frac{n_3}{n_2}\rho_3'$ zurückgeführt, weil dadurch die Ausdrücke rechter Hand alle ganz gleich gebaut erscheinen, was nicht nur deren Discussion sehr vereinfacht und die Zahl der zu berechnenden Grössen erheblich vermindert, sondern auch fast ohne weitere Rechnung ρ_1' und ρ_3' aus r_2 zu finden gestattet. Bedient man sich nämlich der Bezeichnungen:

$$5)\quad \begin{cases} A_m = R_1 \sin(Q_m - L_1) \\ B_m = R_2 \sin(Q_m - L_2) \\ C_m = R_3 \sin(Q_m - L_3), \end{cases}$$

so kann die rechte Seite der oben genannten Gleichungssysteme allgemein dargestellt werden durch:

$$6)\quad P_m = \frac{n_1}{n_2} A_m - B_m + \frac{n_3}{n_2} C_m,$$

oder:

$$6^*)\quad P_m' = \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right) A_m + \left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{N_3}{N_2}\right) C_m.$$

Schreibt man daher zur Abkürzung noch:

$$7)\quad \begin{cases} V_1 = q_3 \sin(Q_1 - Q_3) \\ V_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \cdot q_3 \sin(Q_1 - Q_3) \\ V_3 = q_1 \sin(Q_1 - Q_3) = \frac{q_1}{q_3} \cdot q_3 \sin(Q_1 - Q_3), \end{cases}$$

so wird:

$$8)\quad \begin{cases} \frac{n_1}{n_2} \rho_1' V_1 = P_1 = P_1' \\ \rho_2' V_2 = P_2 = P_2' \\ \frac{n_3}{n_2} \rho_3' V_3 = P_3 = P_3'. \end{cases}$$

§. 3.

Berechnung des Verhältnisses der Dreiecksflächen.

Als nächste Aufgabe stellt sich uns die Entwicklung der Dreiecksflächen, oder richtiger gesagt, ihrer Verhältnisse nach steigenden Potenzen der Zeit dar. Dazu wollen wir ausgehen von den Relationen:

$$M = M_o + \frac{k\mathfrak{t}}{a^{\frac{3}{2}}} = E - \varepsilon \sin E$$

$$r \sin v = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin E$$

$$r \cos v = a (\cos E - \varepsilon)$$

$$r = a (1 - \varepsilon \cos E).$$

Mit Hilfe derselben gewinnen wir nach einigen leicht ersichtlichen Reductionen successive:

$$r_m r_n \sin (v_n - v_m) = a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \Big[\sin (E_n - E_m) - \varepsilon (\sin E_n - \sin E_m)\Big] =$$

$$= a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \Big[\frac{k (\mathfrak{t}_n - \mathfrak{t}_m)}{a^{\frac{3}{2}}} - (E_n - E_m) + \sin (E_n - E_m)\Big],$$

oder endlich:

$$r_m r_n \sin (v_n - v_m) = a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \Big[\frac{k (\mathfrak{t}_n - \mathfrak{t}_m)}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{(E_n - E_m)^3}{6} + \frac{(E_n - E_m)^5}{120} \ldots\Big].$$

Reducirt man E_n und E_m auf das zur Zeit $\mathfrak{t}$ geltende E, lässt man $k\mathfrak{t} = \theta$ sein, und schreibt man Kürze halber: $\mathfrak{t}_n - \mathfrak{t} = \mathfrak{t}'_n$, $t_m - \mathfrak{t} = \mathfrak{t}'_m$, so erhält man:

$$E_n = E + \frac{k\mathfrak{t}'_n}{1} \cdot \frac{dE}{d\theta} + \frac{k^2\mathfrak{t}'^2_n}{2} \cdot \left(\frac{d^2E}{d\theta^2}\right) + \frac{k^3\mathfrak{t}'^3_n}{6} \cdot \left(\frac{d^3E}{d\theta^3}\right) \ldots$$

$$E_m = E + \frac{k\mathfrak{t}'_m}{1} \cdot \frac{dE}{d\theta} + \frac{k^2\mathfrak{t}'^2_m}{2} \cdot \left(\frac{d^2E}{d\theta^2}\right) + \frac{k^3\mathfrak{t}'^3_m}{6} \cdot \left(\frac{d^3E}{d\theta^3}\right) \ldots$$

$$E_n - E_m = k (\mathfrak{t}'_n - t'_m) \Big[\frac{dE}{d\theta} + \frac{k (\mathfrak{t}'_n + \mathfrak{t}'_m)}{2} \cdot \left(\frac{d^2E}{d\theta^2}\right) + \frac{k^2 (\mathfrak{t}'^2_n + \mathfrak{t}'_n \mathfrak{t}'_m + \mathfrak{t}'^2_m)}{6} \left(\frac{d^3E}{d\theta^3}\right) \ldots\Big]$$

Wir werden nun zunächst die Differentialquotienten von E in solche von r umsetzen. Die Mittel hiezu liefert uns die Gleichung:

$$E - \varepsilon \sin E = M + \frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Sie ergibt nach einander:

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon \cos E)} = \frac{1}{r\sqrt{a}}$$

$$\left(\frac{d^2E}{d\theta^2}\right) = -\frac{1}{r^2\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$\left(\frac{d^3E}{d\theta^3}\right) = +\frac{1}{r^2\sqrt{a}} \Big[\frac{2}{r} \cdot \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{d^2r}{d\theta^2}\Big].$$

Die Werthe der Differentialquotienten von r nach θ, die wir später brauchen werden, mögen gleich hier angefügt werden; sie lauten:

$$\text{F)} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right) = \dfrac{\varepsilon \sin v}{\sqrt{a (1-\varepsilon^2)}} = \dfrac{\varepsilon \sin v}{\sqrt{p}} \\[2ex] \left(\dfrac{d^2r}{d\theta^2}\right) = \dfrac{\varepsilon \cos v}{r^2}. \end{cases}$$

Man kann aus ihnen die bemerkenswerthe Relation:

$$
\text{G)}\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{1}{r}\left[1-\varepsilon\cos v - \frac{\varepsilon^2 \sin v^2}{1+\varepsilon\cos v}\right] = \\
&= \frac{1}{r} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2
\end{aligned}\right.
$$

folgern, welche weiter unten sogleich Verwendung finden wird.

Kehren wir zu unserem Ausdrucke für $E_n - E_m$ zurück, so lässt er sich jetzt wie folgt schreiben:

$$
E_n - E_m = \frac{k(t'_n - t'_m)}{r\sqrt{a}}\left[1 - \frac{k(t'_n + t'_m)}{2r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) + \frac{k^2(t_n'^2 + t'_n t'_m + t_m'^2)}{6r}\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right)\right\} \cdots\right]
$$

$$
\begin{aligned}
(E_n - E_m)^3 = \frac{k^3 (t'_n - t'_m)^3}{r^3 a\sqrt{a}}\Bigg[1 - \tfrac{3}{2}\cdot\frac{k(t'_n + t'_m)}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{k^2(t_n'^2 + t'_n t'_m + t_m'^2)}{2r}\left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right) + \\
+ \frac{k^2(7t_n'^2 + 10t'_n t'_m + 7t_m'^2)}{4r^2}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \cdots\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
(E_n - E_m)^5 = \frac{k^5(t'_n - t'_m)^5}{r^5 . a\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{a} + \cdots = \frac{k^5 (t'_n - t'_m)^5}{r^5 a\sqrt{a}}\left[\frac{1}{r} - r\left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right) - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] + \cdots
$$

Dies in unserem letzten Ausdruck für $r_n r_m \sin(v_n - v_m)$ substituirt, liefert:

$$
\begin{aligned}
r_m r_n \sin(v_n - v_m) = k(t'_n - t'_m)\sqrt{p}\Bigg[1 - \frac{k^2(t'_n - t'_m)^2}{6r^3} + \frac{k^3(t'_n - t'_m)^2(t'_n + t'_m)}{4r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) + \\
+ \frac{k^4(t'_n - t'_m)^4}{120r^6} + \frac{k^4(t'_n - t'_m)^2(3t_n'^2 + 4t'_m t'_n + 3t_m'^2)}{40r^4}\left\{\left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}\cdots\Bigg].
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun die unbestimmt gelassene Zeit $t = t_2$, also $r = r_2$, sodann nach einander:

m	n	t'_m	t'_n	$r_m r_n \sin(v_n - v_m)$
2	3	0	$(t_3 - t_2)$	$r_2\ r_3 \sin(v_3 - v_2) = n_1$
1	3	$(t_1 - t_2)$	$(t_3 - t_2)$	$r_1\ r_3 \sin(v_3 - v_1) = n_2$
1	2	$(t_1 - t_2)$	0	$r_1\ r_2 \sin(v_2 - v_1) = n_3$

und unter Einem auch:

$$
\text{9)}\qquad k(t_3 - t_2) = \theta_1 \qquad k(t_3 - t_1) = \theta_2 \qquad k(t_2 - t_1) = \theta_3
$$
$$
(\theta_2 = \theta_1 + \theta_3),
$$

sowie zur Abkürzung:

$$
\text{9*)}\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{r_2^4}\cdot\frac{dr_2}{d\theta} = \chi \\
&\frac{1}{r_2^4}\left[\left(\frac{d^2 r_2}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\right] = \psi,
\end{aligned}
$$

so resultirt für die gesuchten Dreiecksflächen:

$$
\text{10)}\quad \left\{\begin{aligned}
n_1 &= \theta_1\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta_1^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_1^3}{4}\chi + \frac{\theta_1^4}{120r_2^6} + \frac{3\theta_1^4}{40}\psi + \cdots\right] \\
n_2 &= \theta_2\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta_2^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_2^2(\theta_3 - \theta_1)}{4}\chi + \frac{\theta_2^4}{120r_2^6} + \frac{\theta_2^2(3\theta_2^2 - 10\theta_1\theta_3)}{40}\psi + \cdots\right] \\
n_3 &= \theta_3\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta_3^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_3^3}{4}\chi + \frac{\theta_3^4}{120r_2^6} + \frac{3\theta_3^4}{40}\psi + \cdots\right].
\end{aligned}\right.
$$

Es wird sohin:

$$
11)\left\{\begin{aligned}
\frac{n_1}{n_2} &= \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1+\frac{\theta_3(\theta_1+\theta_2)}{6r_2^3}+\frac{\theta_3(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)}{4}\chi+\frac{7\theta_2^4-10\theta_1^2\theta_2^2+3\theta_1^4}{360r_2^6}-\frac{3(\theta_2^4-\theta_1^4)-10\theta_1\theta_2^2\theta_3}{40}\psi\ldots\right]\\
\frac{n_3}{n_2} &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1+\frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{6r_2^3}-\frac{\theta_1(\theta_1\theta_2-\theta_3^2)}{4}\chi+\frac{7\theta_2^4-10\theta_2^2\theta_3^2+3\theta_3^4}{360r_2^6}-\frac{3(\theta_2^4-\theta_3^4)-10\theta_1\theta_2^2\theta_3}{40}\psi\ldots\right]\\
\frac{n_1+n_3}{n_2} &= 1+\frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^3}+\frac{\theta_1\theta_3(\theta_3-\theta_1)}{2}\chi+\frac{\theta_1\theta_3(\theta_2^2+\theta_1\theta_3)}{24r_2^6}-\frac{\theta_1\theta_3(\theta_2^2-3\theta_1\theta_3)}{8}\psi\ldots\\
\frac{n_1}{n_3} &= \frac{\theta_1}{\theta_3}\left[1+\frac{\theta_2(\theta_3-\theta_1)}{6r_2^3}+\frac{\theta_1^3+\theta_3^3}{4}\chi+\frac{7\theta_3^4-10\theta_1^2\theta_3^2+3\theta_1^4}{360r_2^6}-\frac{3(\theta_3^4-\theta_1^4)}{40}\psi\ldots\right].
\end{aligned}\right.
$$

Die einzelnen in den vorstehenden Reihen vorkommenden Glieder sind Functionen der in die Charakteristik des Sonnensystemes multiplicirten Zwischenzeiten, sowie des Radiusvectors der mittleren Beobachtung und seiner Differentialquotienten. Bei der Beurtheilung ihrer Grösse ist daher die Zwischenzeit nicht das allein ausschlaggebende, was man sonderbarer Weise bisher nie gebührend beachtet hat, indem man die Grössenordnung der einzelnen Glieder lediglich nach den Zwischenzeiten zu classificiren pflegt. Dies ist jedoch nur für Radien von mittlerer Grösse zutreffend; sind dieselben ungewöhnlich klein oder gross, so werden gerade sie, und nicht die Zwischenzeiten die massgebenden Factoren. So würde man bei den Kometen mit den kleinsten bekannten Periheldistanzen, wie denen von 1843 I, 1880 I, 1680 1882 II, 1865 I u. s. w. aus Beobachtungen, zwischen welche die Perihelpassage fällt, selbst bei noch so kurzen Zwischenzeiten aus den Reihen nie Näherungswerthe für die Dreiecksflächen ableiten können. Anderseits würden an den Grenzen unseres Planetensystemes, bei Neptun für Beobachtungen aus drei Oppositionen, zwischen denen je zwei ausgelassen wurden, d. h. für Beobachtungen, deren äusserste um rund 6 Jahre von einander abstehen, die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die beiden ersten Reihenglieder noch immer sehr scharf wiedergegeben. Das einzig massgebende ist also die heliocentrische Bewegung, oder wenn man lieber will, der Quotient: $\frac{\theta}{r\sqrt{r}}$; so lange diese Bewegung oder dieser Quotient klein bleibt, führen die auf Reihenentwicklungen gegründeten Methoden der Bahnberechnung zu rasch convergirenden Resultaten, die Zwischenzeiten mögen welche immer sein.

Übrigens macht sich der Einfluss des Radiusvector schon bei den Asteroiden sehr fühlbar. So beträgt er bei dem oben angezogenen Ceres-Beispiele im Durchschnitte $r = 2{\cdot}6$, so dass r^6 grösser als 300 ist. Da nun in den Dreiecksflächen die von der fünften Potenz der Zeit abhängigen Glieder durch r^6 dividirt erscheinen, werden sie um mehr als das 300fache verkleinert; es ist daher begreiflich, dass sie selbst bei einem Intervalle von 260 Tagen noch immer einen geringen Werth besitzen, und dass bereits bei den Asteroiden überhaupt ohne wesentlichen Nachtheil für die Convergenz der successiven Näherungen die Zeitintervalle, auf welche man die Bahnbestimmung gründet, verhältnissmässig gross genommen werden können.

§. 4.

Vergleichung der Näherungswerthe, von denen man bisher ausging.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch eine Untersuchung über den Grad der Approximation einschalten, den die Bahnbestimmungsmethoden von Gauss und Oppolzer in der ersten Annäherung besitzen, und jenen, welche das Theorem von Gibbs gewährt.

Gauss setzt bekanntlich in erster Annäherung:

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\theta_1}{\theta_3}; \qquad \frac{n_1+n_3}{n_2} = 1+\frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^3},$$

das heisst:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left(1 + \frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^3}\right)$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left(1 + \frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^3}\right).$$

Versehen wir nun zur Unterscheidung die aus den Reihen und aus Gauss' Annahme sich ergebenden Verhältnisse der Dreiecksflächen mit den Indices R und G, und bemerken wir gleich hier, dass wir später den analogen in Oppolzer's und Gibbs' Methoden verwendeten Verhältnissen die Indices O und g ertheilen werden, so finden wir mit Rücksicht auf 11)

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_G = + \frac{\theta_1\theta_3(\theta_3-\theta_1)}{6\theta_2\, r_2^3} + \ldots$$

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_3}{n_2}\right)_G = - \frac{\theta_1\theta_3(\theta_3-\theta_1)}{6\theta_2\, r_2^3} + \ldots$$

Gauss vernachlässigt also, worauf Encke zuerst aufmerksam gemacht, in $\frac{n_1}{n_2}$ und $\frac{n_3}{n_2}$, ausser im Falle gleicher Zwischenzeiten, bereits Grössen zweiter Ordnung, wenn man den oben für die Convergenz der Reihen als massgebend bezeichneten Quotienten $\frac{\theta}{r\sqrt{r}}$ als eine Grösse erster Ordnung ansieht, und zwar ist der eine dieser Quotienten um dieselbe Quantität zu klein, wie der andere zu gross. Dieser Umstand drückt den dadurch in den Fundamentalgleichungen erzeugten Fehler auf einen der dritten Ordnung herab, so lange die Bewegung der Erde in der Zwischenzeit eine mässige ist, so dass, wie es auch Gauss angibt, die Fundamentalgleichungen in der That bis auf einschliesslich Grössen zweiter Ordnung richtig sind. Wir haben nämlich nach 6)

$$(P_m)_R-(P_m)_G = \left(\frac{n_1 A_m + n_3 C_m}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_1 A_m + n_3 C_m}{n_2}\right)_G =$$

$$= \frac{\theta_1\theta_3(\theta_3-\theta_1)}{6\theta_2\, r_2^3}\Big[R_3 \sin(L_3-Q_m) - R_1 \sin(L_1-Q_m)\Big]\ldots.$$

Ist nun L_3-L_1 eine Grösse erster Ordnung, so ist es offenbar auch der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern, und das Obige damit bewiesen.

v. Oppolzer geht aus von der Annahme:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta_3(\theta_2+\theta_1)}{(r_3+r_1)^3} + \frac{4\theta_1^2\theta_3}{\theta_2}\cdot\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}\right]$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{(r_3+r_1)^3} - \frac{4\theta_1\theta_3^2}{\theta_2}\cdot\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}\right].$$

Um diese Ausdrücke mit unseren Reihen vergleichen zu können, müssen wir sie erst in die dortigen Zeichen umsetzen, und benützen dazu die Entwickelungen:

$$r_1 = r_2 - \theta_3\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) + \frac{\theta_3^2}{2}\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) - \ldots$$

$$r_3 = r_2 + \theta_1\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) + \frac{\theta_1^2}{2}\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) + \ldots,$$

aus denen sich ergibt:

$$(r_3+r_1)^{-3} = \frac{1}{8r_2^3}\left[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\theta_3-\theta_1}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) - \frac{3}{4}\cdot\frac{\theta_3^2+\theta_1^2}{r_2}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{(\theta_3-\theta_1)^2}{r_2^2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\ldots\right]$$

$$\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4} = \frac{\theta_2}{16r_2^4}\left[\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) - \frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cdot\frac{d^2r_2}{d\theta^2} + \frac{2(\theta_3-\theta_1)}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\ldots\right].$$

Darnach lautet Oppolzer's Annahme:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_3(\theta_1+\theta_2)}{6r_2^3} + \frac{\theta_3(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)}{4r_2^4}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) - \frac{\theta_2\theta_3(\theta_2^2-\theta_1\theta_3)}{8r_2^4}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) + \frac{\theta_2\theta_3^2(\theta_3-\theta_1)}{4r_2^5}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\cdots\right]$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{6r_2^3} - \frac{\theta_1(\theta_1\theta_2-\theta_3^2)}{4r_2^4}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) - \frac{\theta_1\theta_2(\theta_2^2-\theta_1\theta_3)}{8r_2^4}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) - \frac{\theta_1^2\theta_2(\theta_3-\theta_1)}{4r_2^5}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\cdots\right]$$

mithin:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_O = \frac{\theta_1\theta_3}{\theta_2}\left[\frac{(\theta_1+\theta_2)(7\theta_2^2-3\theta_1^2)}{360r_2^6} + \frac{3\theta_2^3+3\theta_1^2\theta_3-\theta_2\theta_3^2}{40r_2^4}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) + \frac{(\theta_2+3\theta_1)(\theta_3^2+\theta_1^2)}{20r_2^5}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\cdots\right]$$

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_3}{n_2}\right)_O = \frac{\theta_1\theta_3}{\theta_2}\left[\frac{(\theta_2+\theta_3)(7\theta_2^2-3\theta_3^2)}{360r_2^6} + \frac{3\theta_2^3+3\theta_1\theta_3^2-\theta_2\theta_1^2}{40r_2^4}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) + \frac{(\theta_2+3\theta_3)(\theta_3^2+\theta_1^2)}{20r_2^5}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\cdots\right].$$

Oppolzer berücksichtigt daher, seiner Angabe entsprechend, in der ersten Annäherung die von der dritten Potenz der Zeit abhängenden Glieder noch vollständig; die vernachlässigten Glieder vierter Ordnung verschwinden aber bei nahe gleichen Zwischenzeiten nicht, sondern stehen bei solchen im Gegentheile mit Ausnahme des letzten sehr nahe im Maximum.

Gibbs endlich wendet bei seiner Methode der Bahnbestimmung die Relationen an

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\cdot\frac{1+\mu_1 r_1^{-3}}{1-\mu_2 r_2^{-3}}$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\cdot\frac{1+\mu_3 r_3^{-3}}{1-\mu_2 r_2^{-3}}$$

$$\mu_1 = \frac{\theta_2\theta_3-\theta_1^2}{12} \qquad \mu_2 = \frac{\theta_1\theta_3+\theta_2^2}{12} \qquad \mu_3 = \frac{\theta_1\theta_2-\theta_3^2}{12},$$

oder in unserer Schreibweise:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_3(\theta_1+\theta_2)}{6r_2^3} + \frac{\theta_3(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)}{4r_2^4}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) + \frac{\theta_3(\theta_1+\theta_2)(\theta_1\theta_3+\theta_2^2)}{72r_2^6} - \frac{\theta_3^2(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)}{8r_2^4}\left\{\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\right\}\cdots\right]$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{6r_2^3} - \frac{\theta_1(\theta_1\theta_2-\theta_3^2)}{4r_2^4}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) + \frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)(\theta_1\theta_3+\theta_2^2)}{72r_2^6} - \frac{\theta_1^2(\theta_1\theta_2-\theta_3^2)}{8r_2^4}\left\{\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\right\}\cdots\right].$$

Demzufolge beträgt der Fehler von Gibbs' Voraussetzung:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_g = +\frac{\theta_1\theta_3(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)(\theta_3-\theta_1)}{40\theta_2 r_2^4}\left[\frac{1}{9r_2^2} - \frac{d^2r_2}{d\theta^2} + \frac{4}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\right]\cdots$$

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)_R - \left(\frac{n_3}{n_2}\right)_g = -\frac{\theta_1\theta_3(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)(\theta_3-\theta_1)}{40\theta_2 r_2^4}\left[\frac{1}{9r_2^2} - \frac{d^2r_2}{d\theta^2} + \frac{4}{r_2}\cdot\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2\right]\cdots$$

Man erkennt daraus die interessante Thatsache, dass sich für die Verhältnisse der Dreiecksflächen Gibbs' Näherungswerthe in Bezug auf die Glieder der vierten Ordnung genau ebenso verhalten, wie die von Gauss in Bezug auf die der zweiten. Bei gleichen Zwischenzeiten werden diese Verhältnisse bis einschliesslich der Glieder vierter Ordnung streng wiedergegeben; allein selbst bei ungleichen Zwischenzeiten sinkt der Fehler noch immer auf eine Grösse fünfter Ordnung, so lange die Bewegung der Erde als eine der ersten betrachtet werden kann, da auch hier das eine der Verhältnisse um eben so viel zu gross, als das andere zu klein angenommen wird. Unter allen Umständen wird jedoch der weitaus grösste Theil der Glieder vierter Ordnung berücksichtigt.

Dieser Untersuchung zufolge, welche, wie ich glaube, die Tragweite des Gibbs'schen Theorems erst ins rechte Licht gestellt hat, übertrifft die durch dasselbe erzielte Annäherung an die Wahrheit an Genauigkeit noch immer die ersten Annahmen, von denen Oppolzer bei seiner Bahnbestimmungsmethode, und in noch weit höherem Masse die, von denen Gauss dabei ausgeht. Es kann daher unter

Umständen Gibbs' Relation noch eine brauchbare, ja selbst völlig ausreichende Annäherung liefern, wenn Gauss' erste Annahmen für seine Unbekannten des Problemes (P und Q) bereits keine Näherungen mehr sind. Die Verhältnisse, unter denen dies eintritt, werden weiter unten ausführlicher besprochen werden. Wenn aber Beebe und Philipps weiter gehen und am Eingange ihres Mémoirs über die Bahnbestimmung des Kometen 1880, V [1] behaupten, dass Gauss' Methode keine höheren Potenzen der Zeit, als die zweiten berücksichtigt, so ist dies ein Irrthum, der umsomehr einer Berichtigung bedarf, als er sich auch anderwärts vorfindet. Dasselbe besagt nämlich, wenigstens dem Wortlaute nach, auch die Äusserung von Oppolzer auf S. 358 des ersten Bandes seines bereits einmal citirten Lehrbuches, nach welcher man durch Gauss' Methode die »Elemente theoretisch bis auf Grössen erster Ordnung richtig« erhält. Aus diesen Aussprüchen würde nämlich folgen, dass Gauss' Methode blos eine Näherungsmethode sei, die nur gestattet, genäherte Elemente zu berechnen. Dies ist nicht richtig. In den ersten Näherungswerthen für P und Q berücksichtigt Gauss allerdings nur noch Glieder zweiter Ordnung; er zeigt aber, wie man diese Näherungswerthe oder solche, die man sich auf irgend eine andere Art verschafft hat, nach und nach systematisch, eventuell mit Hilfe des beim Ceres-Beispiele erläuterten Kunstgriffes auf den vollkommen strengen Werth bringen kann und dadurch die besten Elemente erhält, die sich überhaupt aus den vorgelegten Beobachtungen ableiten lassen. Gibbs' Methode hingegen ist nur eine Näherungsmethode, mittelst welcher man, wenn die vierten Potenzen der Zeit zur Ermittlung des Verhältnisses der Dreiecksflächen nicht mehr völlig genügen, was sich bei ersten Bahnbestimmungen allerdings selten genug ereignen wird, nie eine vollständige Darstellung der Beobachtungen erzielen kann, weil sie kein Mittel an die Hand gibt, die Dreiecksflächen zu verbessern. Einen Beleg für diese Behauptung bietet eigenthümlicher Weise Beebe's und Philipp's oben angezogene Bahnbestimmung des Kometen 1880 V selbst dar. Trotz der Vorsicht in der Auswahl der Beobachtungen, nach welcher dieselben so gut wie äquidistant sind ($t_2 - t_1 = 13\cdot003^{Tg}$; $t_3 - t_2 = 13\cdot062^{Tg}$) und in Folge dessen den vorstehenden Untersuchungen gemäss, Gibbs' Theorem die genauesten Werthe liefert, bleiben schliesslich (nach Verbesserung eines sofort in die Augen springenden Versehens) in den drei zu Grunde gelegten Beobachtungen, im Sinne Beob.—Rechn. noch folgende Fehler übrig:

1880		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
October	25·31	—0″9	—1″0
November . . .	7·32	—0·7	—0·5
» . . .	20·38	+1·5	+0·7

Da die Rechnung durchwegs mit Logarithmen von sieben Decimalen geführt ist, kann man dies wohl nicht mehr als eine vollständige Darstellung der Beobachtungen bezeichnen; es ist daher auch die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu suchen, der die drei vorgelegten Beobachtungen vollständig darstellt, hier, wenn auch nur in theoretischer Beziehung, nicht in aller Strenge gelöst.

§. 5.

Umformung der Fundamentalgleichungen.

Zur Untersuchung der Grösse der einzelnen, in eine Bahnbestimmung eintretenden Quantitäten, werden wir uns der Fundamentalgleichungen in der Form 4) bedienen, deren rechte Seite allgemein (6*) lautet:

$$P'_m = \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right) A_m + \left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{N_3}{N_2}\right) C_m =$$

$$= \left(\frac{n_1}{n_2} A_m + \frac{n_3}{n_2} C_m\right) - \left(\frac{N_1}{N_2} A_m + \frac{N_3}{N_2} C_m\right) =$$

$$= \varphi_m - \Phi_m,$$

[1] Gould, Astronomical Journal.

wo die Bedeutung von φ_m und Φ_m klar ist. Setzen wir darin für die Verhältnisse der Dreiecksflächen die oben ermittelten Werthe ein, und beschäftigen wir uns zuvörderst nur mit φ_m, so finden wir:

$$
\begin{aligned}
12) \qquad \varphi_m = {} & \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2 r_2^3} [(\theta_1 + \theta_2) A_m + (\theta_2 + \theta_3) C_m] + \\
& + \frac{\theta_1 \theta_3}{4\theta_2} \chi [(\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) A_m - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2) C_m] + \\
& + \frac{\theta_1 \theta_3}{360\theta_2 r_2^6} [(\theta_1 + \theta_2)(7\theta_2^2 - 3\theta_1^2) A_m + (\theta_2 + \theta_3)(7\theta_2^2 - 3\theta_3^2) C_m] - \\
& - \frac{\theta_1 \theta_3}{40\theta_2} \psi [\{3(\theta_1^3 + \theta_1^2 \theta_2 + \theta_2^3) - 7\theta_1 \theta_2^2\} A_m + \{3(\theta_3^3 + \theta_3^2 \theta_2 + \theta_2^3) - 7\theta_2^2 \theta_3\} C_m] + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\chi = \frac{1}{r_2^4} \cdot \left(\frac{dr_2}{d\theta}\right) \qquad \psi = \frac{1}{r_2^4} \cdot \left(\frac{d^2 r_2}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r_2^5} \cdot \left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2$$

$$A_m = R_1 \sin(Q_m - L_1) \qquad C_m = R_3 \sin(Q_m - L_3).$$

Der Bau dieser Formel zeigt unmittelbar, dass sie für die numerische Berechnung durch Einführen der nachstehenden Hilfsgrössen sich sehr vereinfachen lässt.

$$
\text{H)} \left\{
\begin{aligned}
g_1 \sin G_1 &= (\theta_1 + \theta_2) R_1 \sin L_1 + (\theta_2 + \theta_3) R_3 \sin L_3 \\
g_1 \cos G_1 &= (\theta_1 + \theta_2) R_1 \cos L_1 + (\theta_2 + \theta_3) R_3 \cos L_3 \\
g_2 \sin G_2 &= (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) R_1 \sin L_1 - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2) R_3 \sin L_3 \\
g_2 \cos G_2 &= (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) R_1 \cos L_1 - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2) R_3 \cos L_3 \\
g_3 \sin G_3 &= (\theta_1 + \theta_2)(7\theta_2^2 - 3\theta_1^2) R_1 \sin L_1 + (\theta_2 + \theta_3)(7\theta_2^2 - 3\theta_3^2) R_3 \sin L_3 \\
g_3 \cos G_3 &= (\theta_1 + \theta_2)(7\theta_2^2 - 3\theta_1^2) R_1 \cos L_1 + (\theta_2 + \theta_3)(7\theta_2^2 - 3\theta_3^2) R_3 \cos L_3 \\
g_4 \sin G_4 &= (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2 \theta_1 + 3\theta_2 \theta_1^2 + 3\theta_1^3) R_1 \sin L_1 + (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2 \theta_3 + 3\theta_2 \theta_3^2 + 3\theta_3^3) R_3 \sin L_3 \\
g_4 \cos G_4 &= (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2 \theta_1 + 3\theta_2 \theta_1^2 + 3\theta_1^3) R_1 \cos L_1 + (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2 \theta_3 + 3\theta_2 \theta_3^2 + 3\theta_3^3) R_3 \cos L_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Unsere Gleichung lautet jetzt:

$$
\begin{aligned}
12^*) \qquad \varphi_m = {} & \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2 r_2^3} \cdot g_1 \sin(G_1 - Q_m) - \frac{\theta_1 \theta_3}{4\theta_2} g_2 \sin(G_2 - Q_m) \chi - \\
& - \frac{\theta_1 \theta_3}{360\theta_2 r_2^6} \cdot g_3 \sin(G_3 - Q_m) + \frac{\theta_1 \theta_3}{40\theta_2} g_4 \sin(G_4 - Q_m) \psi \ldots
\end{aligned}
$$

Für Φ_m bedarf es keiner neuen Entwicklungen, da es genau so gebaut ist, wie φ_m; es treten nur an die Stelle der für den Himmelskörper geltenden Grössen die analogen der Erde. Sei also:

$$X = \frac{1}{R_2^4} \left(\frac{dR_2}{d\theta}\right)$$

$$\Psi = \frac{1}{R_2^4} \cdot \left(\frac{d^2 R_2}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{R_2^5} \cdot \left(\frac{dR_2}{d\theta}\right)^2.$$

Dann ist:

$$
13) \left\{
\begin{aligned}
\Phi_m = {} & \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2 R_2^3} \cdot g_1 \sin(G_1 - Q_m) - \frac{\theta_1 \theta_3}{4\theta_2} g_2 \sin(G_2 - Q_m) X - \\
& - \frac{\theta_1 \theta_3}{360\theta_2 R_2^6} \cdot g_3 \sin(G_3 - Q_m) + \frac{\theta_1 \theta_3}{40\theta_2} g_4 \sin(G_4 - Q_m) \Psi \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Wir erhalten also:

$$14)\quad P'_m = \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2}\Big[g_1 \sin(G_1 - Q_m)\Big(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\Big) + \frac{3}{2} g_2 \sin(G_2 - Q_m)(X - \chi) +$$

$$+ \frac{1}{60} g_3 \sin(G_3 - Q_m'')\Big(\frac{1}{R_2^5} - \frac{1}{r_2^6}\Big) - \frac{3}{20} \cdot g_4 \sin(G_4 - Q_4)(\Psi - \psi)\Big]$$

Zwischen mehreren der hier eingeführten Hilfsgrössen bestehen so genähert einfache Relationen, dass deren Verwerthung uns der Berechnung eines grossen Theiles derselben überhebt. Ehe wir jedoch zur Aufsuchung dieser Relationen schreiten, wollen wir uns vorher noch zur Orientirung für verschiedene Verhältnisse der Zwischenzeiten und der Intervalle zwischen den äussersten Beobachtungen durch eine hinreichend scharfe Überschlagsrechnung die Grösse der einzelnen Quantitäten numerisch bestimmen, um an der Hand dieser Zahlenwerthe zum späteren Gebrauche ein klareres Bild über die Bedeutung jeder derselben zu gewinnen, als eine allgemeine Discussion zu geben vermag.

Zu diesem Zwecke wollen wir die obigen Hilfsgrössen dadurch in eine übersichtlichere Form bringen, dass wir die Winkel von einem Punkte aus zählen, dessen Länge $\frac{L_3 + L_1}{2}$ beträgt; man hat dann:

$$\text{H}^*)\quad \begin{cases}
g_1 \sin\Big(G_1 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(\theta_2+\theta_3) R_3 - (\theta_1+\theta_2) R_1] \sin \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_1 \cos\Big(G_1 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(\theta_2+\theta_3) R_3 + (\theta_1+\theta_2) R_1] \cos \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_2 \sin\Big(G_2 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = -[(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2) R_3 + (\theta_2\theta_3 - \theta_1^2) R_1] \sin \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_2 \cos\Big(G_2 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = -[(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2) R_3 - (\theta_2\theta_3 - \theta_1^2) R_1] \cos \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_3 \sin\Big(G_3 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(\theta_2+\theta_3)(7\theta_2^2 - 3\theta_3^2) R_3 - (\theta_1+\theta_2)(7\theta_2^2 - 3\theta_1^2) R_1] \sin \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_3 \cos\Big(G_3 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(\theta_2+\theta_3)(7\theta_2^2 - 3\theta_3^2) R_3 + (\theta_1+\theta_2)(7\theta_2^2 - 3\theta_1^2) R_1] \cos \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_4 \sin\Big(G_4 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(3\theta_2^3 - 7\theta_2^2\theta_3 + 3\theta_2\theta_3^2 + 3\theta_3^3) R_3 - (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2\theta_1 + 3\theta_2\theta_1^2 + 3\theta_1^3) R_1] \sin \frac{L_3 - L_1}{2} \\
g_4 \cos\Big(G_4 - \frac{L_3+L_1}{2}\Big) = [(3\theta_2^3 - 7\theta_2^2\theta_3 + 3\theta_2\theta_3^2 + 3\theta_3^3) R_3 + (3\theta_2^3 - 7\theta_2^2\theta_1 + 3\theta_2\theta_1^2 + 3\theta_1^3) R_1] \cos \frac{L_3 - L_1}{2}.
\end{cases}$$

Führt man hierin überall $\frac{R_1 + R_3}{2}$ statt R_1 und R_3 ein, was wenigstens für die Hilfsgrössen, welche zu den Gliedern höherer Ordnung gehören, ganz bedeutungslos ist, und setzt man weiter:

$$g_1 = \frac{R_3 + R_1}{2}\,\theta_2 \gamma_1 \qquad g_2 = \frac{R_3 + R_1}{2}\,\theta_2^2 \gamma_2$$

$$g_3 = \frac{R_3 + R_1}{2}\,\theta_2^3 \gamma_3 \qquad g_4 = \frac{R_3 + R_1}{2}\,\theta_2^3 \gamma_4$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = x \qquad \frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2} = 1 - x,$$

so schrumpfen unsere Gleichungen in die nachstehenden zusammen:

H**)

$$\gamma_1 \sin\left(G_1 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = (1-2x) \sin\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_1 \cos\left(G_1 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = 3 \cos\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_2 \sin\left(G_2 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = -2x(1-x) \sin\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_2 \cos\left(G_2 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = 2(1-2x) \cos\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_3 \sin\left(G_3 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = (1-2x)(1+3x-3x^2) \sin\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_3 \cos\left(G_3 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = 15(1+x-x^2) \cos\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_4 \sin\left(G_4 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = -(1-2x)(1+3x-3x^2) \sin\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$\gamma_4 \cos\left(G_4 - \frac{L_3+L_1}{2}\right) = 5(1-3x+3x^2) \cos\frac{L_3-L_1}{2}.$$

Das Verhältniss $x:1-x$ stellt das Verhältniss der Zwischenseiten dar, bei dem man in der Praxis wohl selten über ein ungünstigeres wie 3 : 7 hinausgehen wird. Supponiren wir also für x Werthe von 0·3 bis 0·7 in Zwischenstufen von 0·1 fortschreitend, so finden wir zunächst:

x	$1-2x$	$x(1-x)$	$1+x-x^2$	$1-3x+3x^2$	$(1-2x)\times(1+3x-3x^2)$
0·3	+0·4	+0·21	+1·21	+0·37	+0·652
0·4	+0·2	0·24	1·24	0·28	+0·344
0·5	0·0	0·25	1·25	0·25	0·000
0·6	−0·2	0·24	1·24	0·28	−0·344
0·7	−0·4	+0·21	+1·21	+0·37	−0·652

Nehmen wir nun für das Zeitintervall $t_3-t_1 = T_2$: 20, 30 und 40 Tage an und setzen wir für die tägliche Winkelbewegung der Erde 1° was für eine Überschlagsrechnung keinen irgendwie erheblichen Fehler veranlassen kann, so erhalten wir folgendes Tableau, in welchem $G'_m = G_m - \frac{L_3+L_1}{2}$ bedeutet.

$T_2 = 20^{Tg}$ $\log \theta_2 = 9\cdot53661$ $\log \theta_2^2 = 9\cdot07322$

x	$\log \gamma_1$	$\log(1\cdot5\,\gamma_2)$	$\log\left(\frac{1}{60}\gamma_3\right)$	$\log(0\cdot15\,\gamma_4)$	x
0·3	0·47058	0·07429	9·47409	9·43744	0·7
0·4	0·47050	9·78102	9·48471	9·31598	0·6
0·5	0·47047	9·11473	9·48820	9·26635	0·5

x	G'_1	G'_2	G'_3	G'_4
0·3	+1°3	− 5°3	+0°4	−3°0
0·4	+0·7	12·0	+0·2	−2·5
0·5	0·0	90·0	0·0	0·0
0·6	−0·7	168·0	−0·2	+2·5
0·7	−1·3	−174·7	−0·4	+3·6

$T_2 = 30^{Tg}$ $\log \theta_2 = 9\cdot71270$ $\log \theta_2^2 = 9\cdot42541$

x	$\log \gamma_1$	$\log(1\cdot5\,\gamma_2)$	$\log\left(\frac{1}{60}\gamma_3\right)$	$\log(1\cdot15\,\gamma_4)$	x
0·3	0·40234	0·00837	9·46569	9·43013	0·7
0·4	0·40213	9·78443	9·47631	9·30810	0·6
0·5	0·40206	9·28800	9·47979	9·25794	0·5

x	G_1'	G_2'	G_3'	G_4'
0·3	+2°1	− 8°0	+0°6	−5°4
0·4	+1·0	17·8	+0·3	−3·8
0·5	0·0	90·0	0·0	0·0
0·6	−1·0	162·2	−0·3	+3·8
0·7	−2·1	−172·0	−0·6	+5·4

$$T_2 = 40^{Tg} \qquad \log \theta_2 = 9\cdot83764 \qquad \log \theta_2^2 = 9\cdot67528$$

x	$\log \gamma_1$	$\log(1\cdot5\gamma_2)$	$\log\left(\frac{1}{60}\gamma_3\right)$	$\log(0\cdot15\,\gamma_4)$	x
0·3	0·45062	0·05996	9·45376	9·41980	0·7
0·4	0·45024	9·78907	9·46436	9·29694	0·6
0·5	0·45011	9·40911	9·46784	9·24599	0·5

x	G_1'	G_2'	G_3'	G_4'
0·3	+2°8	− 10°8	+0°8	−7°3
0·4	+1·4	23·4	+0·4	−5·1
0·5	0·0	90·0	0·0	0·0
0·6	−1·4	156·6	−0·4	+5·1
0·7	−2·8	−169·2	−0·8	+7·3

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich:

1. Dass γ_1 und γ_3 von dem Verhältnisse der Zwischenzeiten fast ganz unabhängig sind, und dass auch γ_4 erst schneller zu wachsen beginnt, wenn dieselben sehr ungleich werden.

2. Dass G_1' und G_3' stets sehr klein bleiben, und dass dies auch für G_4' gilt, so lange die Zwischenzeiten nicht gar zu ungleich sind, und das Intervall 30 Tage nicht überschreitet. Übrigens haben etwas grössere Werthe von G_4' wenig zu bedeuten, da dieser Hilfswinkel, wie wir gleich sehen werden, zu den im Allgemeinen kleinsten Gliede gehört, so dass selbst in den extremsten hier betrachteten Fällen die Annahme $G_4' = 0$ nur dann merkbare Fehler hervorrufen kann, wenn die durch die Beobachtungsorte gelegten grössten Kreise nahe am Sonnenorte vorübergehen (d. h. $G_4 - Q_m$ klein ist), also nur dann, wenn die Bahn sich überhaupt blos unsicher bestimmen lässt.

Wir werden daher für die Überschlagsrechnung im Folgenden:

$$G_1' = G_3' = G_4' = 0$$

also:

$$G_1 = G_3 = G_4 = \frac{L_3 + L_1}{2}$$

setzen, und zur Abkürzung schreiben:

$$k_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \qquad k_3 = \frac{1}{60} \cdot \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \qquad k_4 = \frac{3}{20} \cdot \frac{\gamma_4}{\gamma_1}$$

$$F_2 = \frac{\sin(G_2 - Q_m)}{\sin(G_1 - Q_m)}.$$

Der weiteren Discussion legen wir also P_m' in der folgenden Form zu Grunde:

$$\text{O}\left\{\begin{aligned}
\varphi_m &= \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1\theta_3}{12}(R_3+R_1)\,\gamma_1 \sin(G_1 - Q_m)\left[\frac{1}{r_2^3} + k_2 F_2 \theta_2 \chi + \frac{k_3\theta_2^2}{r_2^5} - k_4\theta_2^2\psi\right] \\
\Phi_m &= \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1\theta_3}{12}(R_3+R_1)\,\gamma_1 \sin(G_1 - Q_m)\left[\frac{1}{R_2^3} + k_2 F_2 \theta_2 X + \frac{k_3\theta_2^2}{R_2^5} - k_4\theta_2^2\Psi\right] \\
P_m' &= \frac{\theta_1\theta_3}{12}(R_3+R_1)\,\gamma_1 \sin(G_1 - Q_m)\left[\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + k_2 F_2 \theta_2 (X - \chi) + k_3\theta_2^2\left(\frac{1}{R_2^5} - \frac{1}{r_2^5}\right) - k_4\theta_2^2(\Psi - \psi)\right].
\end{aligned}\right.$$

Der Vollständigkeit halber mögen auch die Werthe der k und deren Producte in die entsprechenden Potenzen von θ_2 hier Platz finden.

I.

x	$\log k_2$			$\log k_3$			$\log k_4$			x
	20^{Tg}	30^{Tg}	40^{Tg}	20^{Tg}	30^{Tg}	40^{Tg}	20^{Tg}	30^{Tg}	40^{Tg}	
0·3	9·60371	9·60603	9·60934	9·00351	9·00335	9·00314	8·96686	8·96779	8·96918	0·7
0·4	9·31052	9·32230	9·33883	9·01421	9·01418	9·01412	8·84548	8·84597	8·84670	0·6
0·5	8·64426	8·82600	8·95900	9·01773	9·01773	9·01773	8·79588	8·79588	8·79588	0·5

II.

x	$T_2 = 20^{Tg}$			$T_2 = 30^{Tg}$			$T_2 = 40^{Tg}$			x
	$\log(k_2\theta_2)$	$\log(k_3\theta_2^2)$	$\log(k_4\theta_2^2)$	$\log(k_2\theta_2)$	$\log(k_3\theta_2^2)$	$\log(k_4\theta_2^2)$	$\log(k_2\theta_2)$	$\log(k_3\theta_2^2)$	$\log(k_4\theta_2^2)$	
0·3	9·14032	8·07673	8·04008	9·31873	8·42876	8·39320	9·44698	8·67842	8·64446	0·7
0·4	8·84713	8·08743	7·91870	9·03500	8·43959	8·27138	9·17647	8·68940	8·52198	0·6
0·5	8·18087	8·09095	7·86910	8·53870	8·44314	8·22129	8·79664	8·69301	8·47116	0·5

Gestützt auf die Zahlenwerthe der obigen Tabelle. werden wir nun die Vereinfachung der Hilfsgrössen $g_3\,G_3$ und $g_4\,G_4$ vornehmen.

Aus unseren Gleichungen H) findet man leicht:

$$g_3 \sin G_3 = \frac{25}{4}\theta_2^2 \cdot g_1 \sin G_1 + \frac{3}{4}(\theta_3-\theta_1)\left[(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+2\theta_1)R_1 \sin L_1 - (\theta_2+\theta_3)(\theta_2+2\theta_3)R_3 \sin L_3\right]$$

$$g_3 \cos G_3 = \frac{25}{4}\theta_2^2 \cdot g_1 \cos G_1 + \frac{3}{4}(\theta_3-\theta_1)\left[(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+2\theta_1)R_1 \cos L_1 - (\theta_2+\theta_3)(\theta_2+2\theta_3)R_3 \cos L_3\right]$$

$$g_4 \sin G_4 = \frac{5}{12}\theta_2^2 \cdot g_1 \sin G_1 + \frac{1}{12}(\theta_3-\theta_1)\left[(31\theta_2\theta_3+4\theta_1\theta_3-14\theta_1^2)R_1 \sin L_1 - (31\theta_1\theta_2+4\theta_1\theta_3-14\theta_3^2)R_3 \sin L_3\right]$$

$$g_4 \cos G_4 = \frac{5}{12}\theta_2^2 \cdot g_1 \cos G_1 + \frac{1}{12}(\theta_3-\theta_1)\left[(31\theta_2\theta_3+4\theta_1\theta_3-14\theta_1^2)R_1 \cos L_1 - (31\theta_1\theta_2+4\theta_1\theta_3-14\theta_3^2)R_3 \cos L_3\right].$$

Um die mit $(\theta_3-\theta_1)$ multiplicirten Glieder rechter Hand näherungsweise auszuwerthen, nehme man statt R_1, R_3; L_1, L_3 überall an: $\frac{R_3+R_1}{2}$ und $\frac{L_3+L_1}{2}$; man hat dann:

$$g_3 \sin G_3 = \frac{25}{4}\theta_2^2 . g_1 \sin G_1 - \frac{15}{4}(\theta_3-\theta_1)^2\theta_2 \frac{R_3+R_1}{2} \sin \frac{L_3+L_1}{2}$$

$$g_3 \cos G_3 = \frac{25}{4}\theta_2^2 . g_1 \cos G_1 - \frac{15}{4}(\theta_3-\theta_1)^2\theta_2 \frac{R_3+R_1}{2} \cos \frac{L_3+L_1}{2}$$

$$g_4 \sin G_4 = \frac{5}{12}\theta_2^2 . g_1 \sin G_1 + \frac{15}{4}(\theta_3-\theta_1)^2\theta_2 \frac{R_3+R_1}{2} \sin \frac{L_3+L_1}{2}$$

$$g_4 \cos G_4 = \frac{5}{12}\theta_2^2 . g_1 \cos G_1 + \frac{15}{4}(\theta_3-\theta_1)^2\theta_2 \frac{R_3+R_1}{2} \cos \frac{L_3+L_1}{2}.$$

Hebt man darin $g_1 \sin G_1$ und $g_1 \cos G_1$ mit ihren betreffenden Coëfficienten als Factoren heraus, und führt man dann im Restgliede auch für $g_1 \sin G_1$ und $g_1 \cos G_1$ dieselben Vereinfachungen wie oben ein, so findet man:

$$g_3 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_3\right\} = \left[1 - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right]\frac{25}{4}\theta_2^2 g_1 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_1\right\} = 6\cdot2\,\theta_2^2 g_1 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_1\right\}$$

$$g_4 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_4\right\} = \left[1 + 3\cdot\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right]\frac{5}{12}\theta_2^2 g_1 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_1\right\} = \frac{7}{15}\theta_2^2 g_1 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{G_1\right\}.$$

Nehmen wir nun als Durchschnittswerth für $\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2} = 0\cdot2$ $(\theta_3 : \theta_1 = 3:2)$, so bekommen wir, wie oben schon eingesetzt ist:

$$\frac{25}{4}\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right] = 6\cdot2$$

$$\frac{5}{12}\left[1 + 3\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right] = \frac{7}{15}.$$

Man wird daher mit einer stets ausreichenden Genauigkeit annehmen können:

$$15)\qquad \varphi_m = \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1\theta_3}{6\theta_2} g_1 \sin(G_1 - \Omega_m)\left[\frac{1}{r_2^3} + \frac{0\cdot1\,\theta_2^2}{r_2^6} - 0\cdot07\,\theta_2^2\psi\right] - \frac{\theta_1\theta_3}{4\theta_2} g_2 \sin(G_2 - \Omega_m)\chi.$$

Für g_1 und g_2 folgt aus dem Früheren sehr leicht:

$$g_1^2 = [(\theta_1+\theta_2)R_1 + (\theta_2+\theta_3)R_3]^2\cos^2\frac{L_3-L_1}{2} + [(\theta_1+\theta_2)R_1 - (\theta_2+\theta_3)R_3]^2\sin^2\frac{L_3-L_1}{2}$$

$$g_2^2 = [(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)R_1 - (\theta_1\theta_2-\theta_3^2)R_3]^2\cos^2\frac{L_3-L_1}{2} + [(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)R_1 + (\theta_1\theta_2-\theta_3^2)R_3]^2\sin^2\frac{L_3-L_1}{2}.$$

Setzt man darin $\sqrt{R_1 R_3}$ statt R_1 und R_3, so erhält man für g_1 und g_2 die sehr genäherten Werthe:

$$g_1^2 = R_1 R_3\left[\left(3\theta_2\cos\frac{L_3-L_1}{2}\right)^2 + (\theta_3-\theta_1)^2\sin^2\frac{L_3-L_1}{2}\right]$$

$$g_2^2 = 4R_1R_3\left[\theta_2^2(\theta_3-\theta_1)^2\cos^2\frac{L_3-L_1}{2} + \theta_1^2\theta_3^2\sin^2\frac{L_3-L_1}{2}\right].$$

Aus diesen geht hervor, dass sehr nahe

$$g_1 = 3\theta_2\sqrt{R_1 R_3}\cos\frac{1}{2}(L_3-L_1)$$

und g_2 höchstens eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist.

§. 6.

Erörterung des Specialfalles, in dem die Beobachtungen in einem grössten Kreise liegen.

An diesem Punkte angelangt, dürfte es auch am Platze sein, die Folgen zu besprechen, welche es für eine Bahnbestimmung nach sich zieht, wenn die drei Orte des Gestirnes in einem grössten Kreise liegen, und die Modalitäten zu erörtern, unter denen dies eintreten kann.

Die Bedingung, dass die drei Orte eines Himmelskörpers in einem grössten Kreise liegen, lautet:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_m$$

$$P_1' = P_2' = P_3' = P_m' = \varphi_m - \Phi_m = o$$

oder, wenn wir für φ_m und Φ_m unseren zuletzt (15) dafür entwickelten Ausdruck in Anspruch nehmen:

$$\left[\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)\left(1+\frac{0\cdot 1\,\theta_2^2}{r_2^3}+\frac{0\cdot 1\,\theta_2^2}{R_2^3}\right)-0.07\theta_2^2(\psi-\Psi)\right]g_1 \sin(G_1-\mathcal{Q}_m)+\frac{3}{2}g_2 \sin(G_2-\mathcal{Q}_m)[\chi-X]=0.$$

Zur Erleichterung der Discussion wollen wir sie in drei Unterabtheilungen führen.

I. Der grösste Kreis geht nicht durch den mittleren Sonnenort.

Dies vorausgesetzt, ist $\mathcal{Q}_m$ von L_2 und damit auch von G_1 verschieden, da das letztere $\frac{L_1+L_3}{2}$, also auch L_2 nahe gleich ist. Da ferner g_2 einen viel kleineren Werth besitzt, als g_1, kann die obige Gleichung nur stattfinden für

$$r_2 \text{ nahe gleich } R_2.$$

Aus derselben lässt sich aber auch umgekehrt folgern, dass, sobald r_2 nahe gleich R_2 wird, sich der Himmelskörper nahe in einem grössten Kreise bewegen muss.

Dieser Satz kann höchstens dann eine Ausnahme erleiden, wenn die Entfernung des Gestirnes von der Erde ganz ungewöhnlich klein wird; doch ist mir kein Komet bekannt, bei dem dies der Fall gewesen wäre. Vom Kometen 1472, der sich Januar 21 der Erde angeblich bis $\rho=0\cdot033$ näherte, sind die vorhandenen Beobachtungen zu unsicher, um ein Urtheil darüber fällen zu können; hingegen bewegte sich der Lexell'sche Komet (1770 I) während seiner Erdnähe (Juli 1 mit $\rho=0\cdot016$) sehr nahe in einem grössten Kreise, und nicht minder der Komet 1862 II (Juli 4 mit $\rho=0\cdot095$).

Dass die Bewegung eines Himmelskörpers in einem grössten Kreise, der nicht durch den mittleren Sonnenort hindurchgeht, die Sicherheit der Bahnbestimmung nicht beeinträchtige, hat, wenn ich nicht irre, zuerst Hansen ausgesprochen; man muss nur die Formeln auf entsprechende Weise umstellen, was weiter unten am geeigneten Orte geschehen wird.

II. Die beiden äussersten Orte des Himmelskörpers fallen zusammen.

Man kann dies als eine Abart des eben betrachteten Falles bezeichnen, da wieder alle drei Orte in einem und demselben grössten Kreise liegen. Es ist jedoch jetzt nicht nur $K=0$ (Gleichung C), sondern auch $a_2=b_2=c_2=0$ (Gleichung D). In Folge dessen wird die Gleichung, welche ρ_2' ergeben soll, identisch Null und r_2 aus ihr unbestimmbar; a_1, b_1, c_1, sowie a_3, b_3, c_3 hingegen, und damit P_1' und P_3' verschwinden nicht identisch, und liefern deshalb dieselbe Bedingungsgleichung wie oben.

Die Bahn erscheint hier nur aus dem Grunde unbestimmbar, weil deren Ermittlung von r_2 abhängig gemacht wurde, was durch geeignete Transformationen umgangen werden kann. Doch wollen wir uns dabei umso weniger aufhalten, als man gleich bei der Auswahl der Beobachtungen diesen Specialfall zu vermeiden in der Lage ist.

III. Der grösste Kreis geht durch den mittleren Sonnenort.

Betrachten wir nun P_m (6) statt P_m', so lautet die Bedingung hiefür:

$$P_1=P_2=P_3=P_m=\frac{n_1}{n_2}A_m+\frac{n_3}{n_2}C_m-B_m=0.$$

Des weiteren ist jetzt $\mathcal{Q}_1=\mathcal{Q}_2=\mathcal{Q}_3=L_2$, also $B_m=0$, daher:

$$\frac{n_1}{n_2}A_m+\frac{n_3}{n_2}C_m=0.$$

In gleicher Weise gilt bei $B_m=0$ für die Erde:

$$\frac{N_1}{N_2}A_m+\frac{N_3}{N_2}C_m=0.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen resultirt:

$$\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} = 0,$$

oder in Reihen aufgelöst:

$$\frac{1}{6}(\theta_3 - \theta_1)\left[\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + \frac{7\theta_3^2 - 3\theta_1^2}{60}\left(\frac{1}{r_2^6} - \frac{1}{R_2^5}\right) - \frac{9(\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_3)}{20}(\psi - \Psi)\right] + \frac{\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_3}{4}(\chi - X) = 0.$$

Sind die Zwischenzeiten, also θ_3 und θ_1 einander nicht gleich, so wird diese Gleichung wieder nur befriedigt für:

$$r_2 = R_2.$$

Sind jedoch die Zwischenzeiten gleich, so ist dies nicht unbedingt nothwendig; es genügt:

$$\chi = X$$

$$\frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{\varepsilon \sin v}{\sqrt{q(1+\varepsilon)}} = \frac{\varepsilon_0 \sin V}{R_2^4 \sqrt{1-\varepsilon_0^2}},$$

wo ε_0 die Excentricität der Erdbahn, V die wahre Anomalie der Erde vorstellt. Da nun ε_0 sehr klein ist, besagt diese Gleichung eigentlich weiter nichts, als dass:

$$\frac{\varepsilon \sin v}{r_2^4 \sqrt{q(1+\varepsilon)}}$$

klein sein muss, was auf vielfache Art zu erreichen ist; die Bahn bleibt daher jedenfalls unbestimmbar. Es lässt sich übrigens unschwer nachweisen, dass, wenn r_2 nicht nahe gleich R_2 ist, das Gestirn nicht in einem grössten Kreise einherging, sondern in einer Curve mit einem Wendepunkte, welcher gerade zur Mitte der Zeit und in der Verbindungslinie der äussersten Orte eintrat. Dass aber ein solcher Lauf nur durch ein zufälliges Zusammentreffen einer Reihe hiefür selten günstiger Momente herbeigeführt werden kann, liegt auf der Hand; man kann daher fast mit Gewissheit annehmen, dass ein Himmelskörper auch dann nur in einem grössten Kreise sich bewege, der den mittleren Sonnenort streift, wenn seine Entfernung von der Sonne der Einheit nahe kommt. Zur Erhärtung dieser Behauptung könnte sicher eine stattliche Zahl von Kometen namhaft gemacht werden, wenn die Bahnbestimmung derselben nach einer Methode durchgeführt würde, welche diese Thatsache ohne eine specielle Untersuchung unmittelbar erkennen liesse; so bin ich aber augenblicklich nur in der Lage, drei Beispiele hiefür beizubringen, nämlich die Kometen 1869 III, 1877 V, 1885 III.

Die vorstehende Untersuchung hat daher zu dem wie ich glaube neuen und nicht unwichtigen, für den ersten Augenblick jedoch ziemlich unerwarteten Resultate geführt, dass sich, von seltenen Ausnahmen abgesehen, ein Himmelskörper nur dann in einem grössten Kreise bewegen kann, aber auch muss, wenn seine Entfernung von der Sonne der halben Erdbahnaxe nahe gleich ist. Bei näherer Überlegung erkennt man aber sofort, dass dies eigentlich nur ein Corollar des schönen Lambert'schen Satzes ist, nach welchem man aus der Krümmung der scheinbaren Bahn beurtheilen kann, ob das Gestirn eine grössere oder geringere Entfernung von der Sonne besitze, als die Erde.

Die weiteren Ergebnisse meiner Untersuchung stimmen mit Einigem von dem nicht überein, was Gauss in den Artikeln 114, 160 und 162 der Theoria motus ausspricht. Dies rührt zum grossen Theile wohl nur daher, dass Gauss den Specialwerth $r_2 = R_2$ von seinen Betrachtungen ausschliesst, bei dem allein, wie wir jetzt wissen, die Bewegung in einem grössten Kreise vor sich gehen kann.

Es verdient übrigens noch besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn man auch aus drei Beobachtungen bei unbestimmt gelassener Excentricität eine Bahn nicht ermitteln kann, sich doch das Verhältniss der geocentrischen Distanzen der drei Orte stets mit einer ziemlich grossen Sicherheit finden

lässt. Um dies nachzuweisen, multipliciren wir die dritte unserer Grundgleichungen A) des §. 2 mit x und addiren sie hierauf zur zweiten, wodurch wir erhalten:

$$n_1\rho'_1[\sin(\lambda_1-\Pi)+x\operatorname{tg}\beta_1]-n_2\rho'_2[\sin(\lambda_2-\Pi)+x\operatorname{tg}\beta_2]+n_3\rho'_3[\sin(\lambda_3-\Pi)+x\operatorname{tg}\beta_3]=$$
$$=n_1R_1\sin(L_1-\Pi)-n_2R_2\sin(L_2-\Pi)+n_3R_3\sin(L_3-\Pi).$$

Aus dieser Gleichung kann man durch entsprechende Wahl von x irgend eines der ρ' wegschaffen, ohne den willkürlichen Winkel Π zu tangiren, und ohne im Ausdrucke rechter Hand, den wir Kürze halber E nennen wollen, eine Änderung herbeizuführen. Wir gewinnen so die folgenden drei Relationen, in denen die q und $\underset{\sim}{Q}$ dieselben Hilfsgrössen wie immer darstellen.

$$n_3\rho'_3q_2\sin(\underset{\sim}{Q}_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_1-n_2\rho'_2q_3\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2=-E\operatorname{tg}\beta_1$$
$$n_1\rho'_1q_2\sin(\underset{\sim}{Q}_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_1-n_2\rho'_2q_1\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2=+E\operatorname{tg}\beta_3$$
$$n_1\rho'_1q_3\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)-n_3\rho'_3q_1\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)=+E.$$

Der beiden ersten Gleichungen bedienen sich Fabritius und R. Vogel in ihren Eingangs citirten Abhandlungen, um auf sie in Verbindung mit der von uns zur Bestimmung von ρ_2 und r_2 verwendeten Gleichung ihre Methoden der Bahnbestimmung mit Benützung des Gibbs'schen Theoremes zu basiren; die dritte Gleichung ist die Grundlage der Olbers'schen Methode.

Sind die Zwischenzeiten kleine Grössen erster Ordnung, und gilt dies auch von den geocentrischen Bewegungen, so gehören die Glieder linker Hand der zweiten Ordnung an, E aber der dritten. Übergeht man es daher ganz und ersetzt man die Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten, d. h. schreibt man einfach:

$$\frac{\rho'_3}{\rho'_2}=\frac{\theta_2q_3\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2}{\theta_3q_2\sin(\underset{\sim}{Q}_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_1}=M_1$$
$$\frac{\rho'_1}{\rho'_2}=\frac{\theta_2q_1\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2}{\theta_1q_2\sin(\underset{\sim}{Q}_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_1}=M_2$$
$$\frac{\rho'_3}{\rho'_1}=\frac{\theta_1q_3\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)}{\theta_3q_1\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)}=M,$$

so erhält man die M mindestens bis auf Grössen erster Ordnung genau, kann sie aber durch zweckentsprechende Wahl von Π in der Regel noch um eine Ordnung schärfer bekommen. Denn setzt man den willkürlichen Winkel Π: L_1, L_2 oder L_3, so wird E, wie man ohne Mühe erkennt, auf eine Grösse vierter Ordnung herabgedrückt; diese Annahme ist aber an die Bedingung gebunden, dass die $\underset{\sim}{Q}$ nicht zu nahe an den L liegen, d. h. dass die durch die beobachteten Orte gezogenen grössten Kreise nicht zu nahe an den Sonnenorten vorüberführen.

Die Kenntniss des Verhältnisses der geocentrischen Distanzen genügt jedoch für sich allein nicht zur Berechnung einer Bahn, wohl aber dann, wenn ausserdem eines der Elemente, z. B. die Excentricität bekannt ist, oder wie bei der Berechnung einer Kometenbahn als bekannt vorausgesetzt wird. Es wird dadurch die Bahn auch in dem Falle bestimmbar, wo die drei beobachteten Orte sehr nahe in einem grössten Kreise liegen, der durch den mittleren Sonnenort hindurchgeht. In der Kometentheorie begründet dies den sogenannten Ausnahmefall der Olbers'schen Methode, den ich am Schlusse noch eingehender zu besprechen mir vorbehalte.

§. 7.

Genäherte Auswerthung der einzelnen in Betracht kommenden Glieder.

Es erübrigt uns jetzt noch, für die einzelnen Gruppen von Himmelskörpern, die bei Bahnbestimmungen in Betracht kommen, Grenzwerthe für deren Radienvectoren und die χ und ψ (9*) genannten Grössen aufzusuchen.

Bekanntlich ist:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{q(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos v}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon\sin v}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} = \frac{\varepsilon\sin v}{\sqrt{q(1+\varepsilon)}}$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{\varepsilon\cos v}{r^2}.$$

Es ist also, wenn wir einfachheitshalber überall den Index 2 auslassen, da dies hier zu keinen Irrungen Anlass geben kann

$$\chi = \frac{1}{r^4}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon\cos v)^4\sin v}{[q(1+\varepsilon)]^{\frac{9}{2}}}$$

$$\psi = \frac{1}{r^4}\cdot\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right) - \frac{4}{r^5}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon\cos v)^5(\cos v+5\varepsilon\cos^2 v-4\varepsilon)}{[q(1+\varepsilon)]^6}.$$

Das Maximum von:

$$\sin v(1+\varepsilon\cos v)^4$$

findet statt für:

$$5\varepsilon\cos^2 v+\cos v-4\varepsilon = 0$$

$$\cos v = \frac{\sqrt{80\varepsilon^2+1}-1}{10\varepsilon} = \frac{9\varepsilon-1}{10\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon^2}{180}\ldots = 1 - \frac{1+\varepsilon}{10\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{18}\ldots\right)$$

Die zweite Wurzel der Gleichung ist numerisch grösser als 1, kann daher hier nicht in Betracht kommen. Es ist demnach mit ganz bedeutungslosen Vernachlässigungen:

$$1+\varepsilon\cos v = \frac{9}{10}(1+\varepsilon)$$

$$\varepsilon\sin v = \frac{\sqrt{2(1+\varepsilon)(10\varepsilon-1)}}{10}$$

und das Maximum χ_0 von χ:

$$\chi_0 = 0\cdot06561\sqrt{2(10\varepsilon-1)}\;q^{-\frac{9}{2}} = 8\cdot96749\sqrt{10\varepsilon-1}\;q^{-\frac{9}{2}}$$

Das Maximum ψ_0 von ψ tritt offenbar ein für $v=0$ und lautet:

$$\psi_0 = \frac{\varepsilon}{q^6}.$$

Handelt es sich nun um die Bestimmung einer Asteroidenbahn, so erreicht unter den mehr als 300 bekannten Gliedern dieser Gruppe die Excentricität nur in drei Fällen $\varepsilon = \frac{1}{3}$ oder übersteigt diesen Betrag um minimale Quantitäten, und zwar bei (33) Polyhymnia ($\varepsilon = 0\cdot3334$), (164) Eva ($\varepsilon = 0\cdot3468$) und (183) Istria ($\varepsilon = 0\cdot3470$); denn der für (175) Andromache angeführte, übrigens auch nicht wesentlich grössere Werth $\varepsilon = 0\cdot348$ ist zu unsicher, um als Beleg hiefür angeführt werden zu können. Bezüglich der Periheldistanzen besitzen die kleinsten mit Sicherheit bekannten (228) Agathe, (164) Eva und (25) Phocaea mit respective 1·67, 1·72 und 1·80; die Periheldistanzen von (132) Aethra und (323) Brucia werden wohl noch etwas kleiner angegeben, als die von Agathe; es ist aber namentlich die letztere wegen der grossen Unsicherheit der Elemente dieser Planeten nicht verbürgt.

Setzen wir daher in unseren obigen Maximis für χ und ψ als Grenzwerthe ein:

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \qquad q = r = 1\cdot 85,$$

so können wir mit einer nahezu an Gewissheit grenzenden Wahrscheinlichkeit voraussetzen, es werde sein:

$$\begin{array}{ll} \chi \;\; < 0\cdot 00890 & \log \chi \;\; < 7\cdot 94922 \\ \psi \;\; < 0\cdot 00831 & \log \psi \;\; < 7\cdot 91986 \\ r_2^{-6} < 0\cdot 02494 & \log r_2^{-6} < 8\cdot 39698. \end{array}$$

In der letzten Zeit haben sich ausser den Entdeckungen von Asteroiden auch die von periodischen Kometen mit kurzer Umlaufszeit rasch gehäuft. Es werden daher heutzutage erste Bahnbestimmungen nicht selten auch auf diese Gattung von Himmelsbewohnern angewendet, und es lohnt sich deshalb wohl der Mühe, für diese ebenfalls eine Schätzung der Grösse der einzelnen Reihenglieder zu versuchen, so weit dies bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier in Betracht kommenden Bahnen thunlich ist.

Unseren bisherigen Erfahrungen zufolge gehören die periodischen Kometen mit kurzer Umlaufszeit zu den lichtschwachen, zum Theil sogar zu den sehr lichtschwachen Gliedern dieser Gattung von Himmelskörpern. Sie werden deshalb in der Regel in Entfernungen von der Sonne entdeckt, die von der Halbaxe der Erdbahn nicht erheblich verschieden sind, und es ist in Folge dessen auch die Periheldistanz der meisten derselben der Einheit nahe gleich, oder eher kleiner als dieselbe.

Nehmen wir daher als Durchschnittswerthe an:

$$q = r = 1 \qquad \varepsilon = 0\cdot 7$$

und setzen wir dies in unsere oben gefundenen Maxima von χ und ψ ein, so wird:

$$\begin{array}{ll} \chi \;\; = 0\cdot 2273 & \log \chi = 9\cdot 35657 \\ \psi \;\; = 0\cdot 7 & \log \psi = 9\cdot 84510 \\ r_2^{-6} = 1. & \end{array}$$

Was endlich die Erde betrifft, kann man für diese Untersuchung, wegen der ungemein geringen Excentricität ihrer Bahn setzen:

$$X = \varepsilon \sin v \qquad \Psi = \varepsilon \cos v \qquad R_2 = 1$$

Die Maxima von X und Ψ werden darnach ε, also für $\varepsilon = 0\cdot 0168$:

$$X = \Psi = 0\cdot 0168 \qquad \log (X) = \log (\Psi) = 8\cdot 22531.$$

Führen wir nun noch Kürze halber die Bezeichnungen ein:

$$k_2 \theta_2 \chi = \text{II} \qquad k_3 \theta_2^2 r_2^{-6} = \text{III} \qquad k_4 \theta_2^2 \psi = \text{IV}$$

und nennen wir die analogen Glieder für die Erde [II], [III] und [IV], so schreiben sich unsere Gleichungen O) folgendermassen:

$$16)\quad \begin{cases} \varphi_m = \dfrac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \dfrac{\theta_1 \theta_3}{12} (R_3 + R_1) \gamma_1 \sin (G_1 - Q_m) (r_2^{-3} + \text{II} \,.\, F_2 + \text{III} - \text{IV}) \\[2ex] \Phi_m = \dfrac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \dfrac{\theta_1 \theta_3}{12} (R_3 + R_1) \gamma_1 \sin (G_1 - Q_m) (R_2^{-3} + [\text{II}] \,.\, F_2 + [\text{III}] - [\text{IV}]) \\[2ex] P'_m = \dfrac{\theta_1 \theta_3}{12} (R_3 + R_1) \gamma_1 \sin (G_1 - Q_m) \{(R_2^{-3} - r_2^{-3}) + F_2([\text{II}] - \text{II}) + ([\text{III}] - \text{III}) - ([\text{IV}] - \text{IV})\} \end{cases}$$

$$F_2 = \frac{\sin (G_2 - Q_m)}{\sin (G_1 - Q_m)}.$$

Verbinden wir die oben tabellarisch zusammengestellten Werthe von $k_2 \theta_2$, $k_3 \theta_2^2$ und $k_4 \theta_2^2$ mit den eben ermittelten Maximalwerthen für χ, ψ u. s. w., so gewinnen wir die nachstehende Tabelle.

III.

x	$T_2 = 20$ Tage			$T_2 = 30$ Tage			$T_2 = 40$ Tage			x
	II	III	IV	II	III	IV	II	III	IV	
					1. Asteroid					
0·3	0·00123 F_2	0 00030	0 00009	0·00185 F_2	0·00067	9.00021	0·00249 F_2	0.00119	0·00037	0·7
0·4	0·00063 F_2	0·00030	0·00007	0·00096 F_2	0·00069	0·00016	0·00134 F_2	0·00122	0·00028	0·6
0 5	0·00014 F_2	0·00031	0·00006	0·00031 F_2	0·00069	0 00014	0·00056 F_2	0·00123	0·00025	0·5
					2. Komet					
0·3	0·03140 F_2	0·01193	0·00768	0·04735 F_2	0·02684	0·01731	0·06361 F_2	0·04769	0·03087	0·7
0·4	0·01598 F_2	0·01223	0·00580	0·02404 F_2	0·02752	0·01308	0·03412 F_2	0·04891	0·02329	0·6
0·5	0·00345 F_2	0·01233	0·00518	0·00786 F_2	0.02774	0·01165	0·01423 F_2	0·04932	0·02071	0·5
					3. Erde					
0·3	0·00232 F_2	0·01193	0·00018	0·00350 F_2	0·02684	0·00042	0·00470 F_2	0·04769	0·00074	0·7
0·4	0·00118 F_2	0·01223	0·00014	0·00182 F_2	0·02752	0·00031	0·00252 F_2	0·04891	0·00056	0.6
0·5	0·00025 F_2	0·01233	0·00012	0·00058 F_2	0·02774	0·00028	0·00105 F_2	0·04932	0·00050	0·5

Diese Tabelle ist in vielfacher Beziehung sehr lehrreich, indem sie schon auf den ersten Blick augenfällig demonstrirt, wie leicht man bei allgemeinen Raisonnements ohne sorgfältige Erwägung aller in Betracht kommenden Umstände in Irrthümer verfallen kann, und wie misslich es ist, die einzelnen Glieder auf die bisherige einseitige Art nach Rangordnungen zu classificiren.[1] So wird von den drei hier betrachteten Gliedern das erste II allgemein als eines der dritten Ordnung bezeichnet, während die beiden anderen, III und IV zur vierten Ordnung gerechnet werden. Dies ist jedoch, unseren Tabellen zufolge, bei keiner Gruppe von Himmelskörpern zutreffend. Denn, wenn wir auch von der Erde wegen der ungewöhnlich geringen Excentricität ihrer Bahn ganz absehen, und auch die Kometen ausser Acht lassen, so muss doch selbst bei den Asteroiden das erste der beiden Glieder vierter Ordnung III als gleichwerthig mit II betrachtet werden, da es dieses bei nahezu gleichen Zwischenzeiten schon bei einem 20tägigen Intervalle überragt, falls nicht zufällig F_2 einen grossen Werth besitzt. Dazu kommt aber noch, dass III lediglich von r abhängt, daher stets mit dem vollen hier eingesetzten Betrage in die Rechnung

[1] Zu den dadurch verursachten Täuschungen zähle ich auch Clausen's Nachweis (Bull. de la classe phys. math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, I. Ser., X. Bd., S. 175), dass bei der Berechnung einer Bahn nach Olbers' Methode ein in M begangener Fehler sehr vergrössert auf die geocentrischen Distanzen und damit auf die Elemente übergeht, mit anderen Worten, dass:

$$\frac{d\rho}{dM} \text{ oder auch } \frac{d \log \rho}{d \log M}$$

eine Grösse von der Ordnung -1 sei.

Die einzige mir bekannte Auswerthung dieses Differentialquotienten gibt Encke für den Komet 1845 I (Berl. Jahrb. für 1856, S. 369). Darnach ist:

$$\frac{d \log \rho}{d \log M} = 2{\cdot}0$$

und dies soll eine so grosse Quantität sein, dass sie die Genauigkeit der Elemente um eine volle Grössenordnung herabzusetzen vermag! In der Allgemeinheit, in der er gewöhnlich ausgesprochen wird, ist der Satz, wie schon dies Beispiel zeigt, irrig, er muss auf Specialfälle beschränkt werden; ein näheres Eingehen hierauf liegt aber ausserhalb des Rahmens dieser Abhandlung.

eingeht, sobald r den vorgeschriebenen Minimalwerth hat. Soll hingegen II den oben angegebenen Maximalwerth erreichen, so wird nicht nur dies erfordert, sondern auch, dass die Excentricität den selten grossen Werth $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und überdies noch, dass die wahre Anomalie eine bestimmte Grösse $\left(\cos v = 1 - \frac{1+\varepsilon}{10\varepsilon}\right)$ besitzt. Ein dem Maximum naher Werth wird sich daher bei II weitaus seltener einstellen, als bei III, was die Bedeutung von II gegenüber III noch wesentlich zu dessen Ungunsten verringert. Dem entgegen darf allerdings nicht verschwiegen werden, dass sich bei sonnenfernen Asteroiden das Verhältniss beider Glieder zu Gunsten des ersteren (II) verschiebt, da dasselbe den Factor $q^{\frac{9}{2}}$, das andere hingegen q^6 im Nenner enthält. Nimmt man daher für q einen auch nur etwas grösseren Werth als oben an, z. B. statt des selten kleinen $q = 1 \cdot 85$ etwa $q = 2 \cdot 4$, was einem rohen Überschlage zufolge nahezu den Mittelwerth von q für die bisher berechneten Asteroidenbahnen vorstellen dürfte, so wird II bereits im Verhältnisse von 4 : 13, III hingegen in dem von 4 : 19 kleiner; es verkleinert sich mithin III gegen II im Verhältnisse von 2 : 3. Nichtsdestoweniger kann man aus dieser Untersuchung wohl den Schluss ziehen, dass wenigstens bei nahe gleichen Zwischenzeiten durch die Mitnahme des Gliedes II ohne III die Zunahme der Genauigkeit einer ersten Bahnbestimmung mit der dadurch verursachten Vermehrung und Erschwerung der Arbeit in der Regel nicht gleichen Schritt halten wird. Was IV betrifft, ist es bei den Asteroiden, selbst bei einem Intervalle von 40 Tagen, noch ganz bedeutungslos.

In Berücksichtigung aller dieser Verhältnisse halte ich dafür, dass man bei der Bestimmung einer Asteroidenbahn aus 20-, 30- und 40tägigem Intervalle nur ausnahmsweise Fehler begehen wird, die 0·0009, 0·0015 und 0·0025 erreichen, falls man die drei Glieder: II, III und IV vernachlässigt, und es liegt uns nun noch ob, die Bedeutung einer solchen Vernachlässigung zu erforschen.

Zu diesem Zwecke wollen wir eine der Fundamentalgleichungen (8), welche uns die geocentrischen Distanzen liefern, etwa die erste, betrachten, vorerst aber noch bemerken, dass wir darin näherungsweise $\gamma_1 = 3 \;\; G_1 = \frac{L_3 + L_1}{2}$ schreiben und sie dem zufolge nach 16) in die nachstehende abkürzen können:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot \rho_1' \cdot q_3 \sin(\Omega_3 - \Omega_1) = \frac{\theta_1 \theta_3}{4} \cdot (R_3 + R_1) \sin\left(\frac{L_3 + L_1}{2} - \Omega_1\right) \left\{ \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) - (F_2 \,.\, \mathrm{II} + \mathrm{III} - \mathrm{IV}) + \right.$$
$$\left. + (F_2 \,.\, [\mathrm{II}] + [\mathrm{III}] - [\mathrm{IV}]) \right\}.$$

Wie bereits bemerkt wurde, sinkt bei einem Asteroiden r_2^3 wohl nie unter 8; $\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$ ist daher nie wesentlich von der Einheit verschieden; die Bahnbestimmung ruht deshalb im Grunde fast ausschliesslich auf diesem Gliede, indem Vernachlässigungen von 0·0009, 0·0015 und 0·0025, wie sie beim Auslassen der Glieder II, III und IV dem obigen zufolge höchstens zu befürchten sind, im Logarithmus des Klammerausdruckes rechter Hand in runden Zahlen sich nur auf 400, 650 und 1000 Einheiten der sechsten Decimale belaufen werden. Man kann daher bis zu einem Intervalle von 30 Tagen, und länger wird man wohl eine erste Bahnbestimmung nicht leicht hinausschieben, diese Glieder ruhig weglassen, ohne besorgen zu müssen, dass der mittlere Ort dadurch nicht innerhalb der Beobachtungsfehler werde wiedergegeben werden. Einen Beleg hiefür liefert das erste Beispiel der Theoria motus, in welchem die drei Beobachtungen der Juno einen Zeitraum von 22 Tagen (1804, October 5 bis 27) umspannen, und die erste Hypothese nach Gauss im mittleren Orte im Sinne Beob.—Rechn. nur die folgenden Fehler übrig lässt:

$$\Delta\lambda = +2''15 \qquad \Delta\beta = -0''60.$$

Übrigens würde auch noch bei einem Intervalle von 40 Tagen das Auslassen der oben genannten Glieder äusserst selten die Darstellung des mittleren Ortes wesentlich verschlechtern, wenn man nicht etwa gezwungen ist, die Bahnbestimmung auf sehr ungünstig vertheilte Beobachtungen zu gründen, was aber bei einem so langen Intervalle wohl immer vermieden werden kann.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass

$$F_2 = \frac{\sin(G_2 - Q_m)}{\sin(G_1 - Q_m)}$$

keinen beträchtlichen Werth besitzt, obwohl bereits einmal darauf hingewiesen wurde, dass es unter Umständen auch recht gross werden kann. Dies tritt ein, wenn Q_m nahe gleich wird G_1, welches von $\frac{L_1+L_3}{2}$ nur ganz unbedeutend abweicht, also dann, wenn die durch die Beobachtungen gelegten grössten Kreise durch den mittleren Sonnenort hindurchgehen. Dazu muss aber nach §. 6, seltene Specialfälle ausgenommen, r_2 nahe gleich R_2 sein, was bei Asteroiden nie vorkommt. Wir brauchen daher die Eventualität eines grossen F_2 hier nicht weiter zu berücksichtigen.

Wenden wir uns nun zunächst der Detailuntersuchung der einzelnen Glieder der Erde zu, als jenes Himmelskörpers, der in alle Bahnbestimmungen eingeht, so sehen wir, dass bei ihr das Glied [III] schon bei einem Intervalle von 20 Tagen einen so bedeutenden Werth besitzt, dass man es nicht ungestraft vernachlässigen darf, weil es von dem Verhältnisse der Zwischenzeiten fast ganz unabhängig ist, und daher stets mit seinem vollen Betrage in die Rechnung eintritt. Die beiden anderen Glieder fallen ihm gegenüber wegen der geringen Excentricität der Erdbahn wenig ins Gewicht; [IV] ist überhaupt auch hier selbst bei einem Intervalle von 40 Tagen noch irrelevant; [II] hingegen wird bei grösseren Zeitintervallen und erheblich ungleichen Zwischenzeiten schon recht merkbar, indem es zur Zeit der Äquinoctien, wo es in seinem Maximum steht, sogar das analoge Glied II des Asteroiden bedeutend an Grösse überragt, während es zur Zeit der Solstitien bedeutungslos wird.

Das Glied [III] lässt sich übrigens gerade bei der Erde auf eine besonders einfache Weise so gut wie vollständig in Rechnung ziehen. Führt man nämlich in Φ_m dieselbe Kürzung der Hilfsgrössen g_3, G_3 ein, wie seinerzeit in φ_m, so kann man wie dort 15) die beiden Glieder:

$$\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{6\vartheta_2 R_2^3} \cdot g_1 \sin(G_1 - Q_m) + \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{3600_2 R_2^5} g_3 \sin(G_3 - Q_m)$$

zunächst zusammenziehen in:

$$\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{6\vartheta_2 R_2^3} g_1 \sin(G_1 - Q_m)\left[1 + \frac{31}{300} \cdot \frac{\vartheta_2^2}{R_2^3}\right]$$

Darin kann man im Klammerausdrucke noch unbedenklich $R_2^3 = 1$ und $0 \cdot 1$ statt $\frac{31}{300}$ substituiren, also schreiben:

$$17) \qquad \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{6\vartheta_2 R_2^3} g_1 \sin(G_1 - Q_m) + \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{3600_2 R_2^5} g_3 \sin(G_3 - Q_m) = \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{6\vartheta_2} \cdot g_1 \sin(G_1 - Q_m) \cdot \frac{1 + 0 \cdot 1\vartheta_2^2}{R_2^3}.$$

Das Glied [II] lässt sich mit diesem nicht auf eine einfache Art verschmelzen; strebt man daher eine grössere Genauigkeit an, so ist es jedenfalls das zweckmässigste, für die Erdbahn keine Näherungen einzuführen, sondern die von ihr abhängigen Grössen streng zu berechnen.

Betrachten wir nun noch die Verhältnisse bei Kometenbahnen. Hier können sämmtliche Glieder beträchtliche Werthe erreichen, und auch IV, welches bei den Asteroiden und der Erde stets bedeutungslos blieb, sehr ansehnlich werden. Dies fällt umsomehr in die Wagschale, als die Kometen in der Regel bei kleinen v aufgefunden werden, und gerade bei diesen IV im Maximum sich befindet, während der Factor $\sin v$, II wesentlich verkleinert. Die beiden Glieder vierter Ordnung können daher besonders bei nahe gleichen Zwischenzeiten leicht das der dritten Ordnung an Grösse mehrfach übertreffen. Ausserdem darf nicht übersehen werden, dass die Werthe, welche wir für q, r und ε annahmen, häufig in einem für die Bahnbestimmung ungünstigen Sinne werden überschritten werden, und dass nicht selten noch ein anderer Umstand hinzutritt, welcher die Bedeutung der obigen drei Glieder wesentlich erhöht.

Die kurz periodischen Kometen werden aus einem bereits früher angegebenen Grunde meist in Entfernungen aufgefunden, die von der Einheit nicht allzuweit abweichen. Das erste Glied der Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}$$

sinkt deshalb öfter auf eine kleine Grösse herab, und es bleibt nicht mehr das für die Bahnbestimmung fast allein massgebende. Diese Rolle übernehmen dann die Glieder II bis IV; früher unschädliche Vernachlässigungen werden jetzt ganz und gar unzulässig und alle bisherigen Schlüsse hinfällig. In einem solchen Falle kann es mitunter auch vorkommen, dass weder Gauss' Annahme für P und Q noch auch Oppolzer's Formeln eine genügende Annäherung abgeben, um als Ausgangspunkt für eine Bahnberechnung dienen zu können, und dass man selbst mit Gibbs' Theorem keine vollständige Darstellung der Beobachtungen mehr erzielt, sondern nur eine derartige, wie bei einem Planeten, wenn man alle, die zweite Ordnung übersteigenden Glieder vernachlässigt. Beweise für diese Behauptung liefern die Bahnberechnung des Kometen 1880 V, welche Beebe und Philipps nach Gibbs' Methode durchführen, und die des Kometen 1866 I, welche v. Oppolzer in seinem Lehrbuche gibt.

Die erste dieser Bahnbestimmungen wurde schon am Schlusse des §. 4 besprochen; die zweite stellt Oppolzer in seinem Lehrbuche als einen Beleg für die grosse Convergenz seiner Methode hin; aber mit Unrecht, und dies schon aus dem Grunde, weil er sie nicht nach dem Schema einer völlig unbekannten Bahn berechnet, sondern bereits von Näherungswerthen ausgeht. Ausserdem ist aber auch seine Angabe, dass die von ihm verwendeten Näherungswerthe ziemlich falsch seien, irrig. Berechnet man nämlich mit der zu Grunde gelegten Parabel, und mit seinen Schlusselementen die Dreiecksflächen und ihre Quotienten, so findet man die ersteren in der Parabel und Ellipse allerdings ziemlich verschieden; die Verhältnisse derselben aber, auf die es allein ankommt, in beiden bis auf wenige Einheiten der sechsten Decimale gleich. Hätte man nun die aus der Parabel folgenden Verhältnisse als Anfangswerthe in die Gauss'sche Methode eingesetzt, wie Oppolzer es bei seiner Methode thut, so bedarf es doch wohl erst keines weiteren Beweises, dass man auch bei ihr einer zweiten Hypothese nicht bedurft, wohl aber das Ziel viel leichter und rascher erreicht hätte.

Um die späteren Zusammenstellungen durch heterogene Entwicklungen nicht zu sehr zu zerreissen, wollen wir diese Untersuchungen noch mit einer Umgestaltung des Gliedes II beschliessen, da es in der jetzigen Form bei ersten Bahnbestimmungen vor der vollständigen Ableitung der Elemente nicht mit in die Rechnung einbezogen werden könnte. Aus:

$$r_1 = r_2-\theta_3\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)+\frac{\theta_3^2}{2}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right)\ldots$$

$$r_3 = r_2+\theta_1\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)+\frac{\theta_1^2}{2}\cdot\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right)\ldots$$

findet sich leicht:

$$\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)=\frac{r_3-r_1}{\theta_2}+\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\left(\frac{d^2r_2}{d\theta^2}\right)=\frac{r_3-r_1}{\theta_2}+\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cdot\frac{\varepsilon\cos v}{r_2^2}.$$

Damit spaltet sich II in zwei Theile, nämlich:

$$\text{II} = k_2\,\frac{r_3-r_1}{r_2^4}+\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\,\theta_2 k_2\cdot\frac{\varepsilon\cos v}{r_2^6}.$$

Das Maximum des zweiten Theiles dieses Gliedes ist daher: $(1-2x)\cdot\frac{\theta_2^2 k_2}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{r_2^6}F_2$, also mindestens für die Asteroiden eben so bedeutungslos wie IV.

§. 8.

Notiz, die Berechnung des Sectors betreffend.

Zur Berechnung des Verhältnisses (η) des Sectors zum Dreiecke bediene ich mich der im Nachstehenden entwickelten, den Hansen'schen sehr ähnlichen Formeln, die ich aber in manchen Stücken für bequemer halte.

Es sei:

$$n = r_a r_b \sin(v_b - v_a) \qquad n\eta = \theta\sqrt{p}$$

$$v_b - v_a = 2f \qquad E_b - E_a = 2g$$

$$m' = \frac{\theta^2}{6(\sqrt{r_a r_b}\cos f)^3}$$

$$l = \frac{1}{4\cos f}\left[\frac{r_a + r_b - 2\sqrt{r_a r_b}}{\sqrt{r_a r_b}} + 4\sin^2\frac{f}{2}\right]$$

Dann lauten die beiden Grundgleichungen, von denen Hansen [1] ausgeht:

$$\eta^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{m'}{l + \sin^2\frac{g}{2}}$$

$$\eta^2(\eta - 1) = \frac{3m'}{4}\cdot\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = m'\left(1 + \frac{6}{5}\sin^2\frac{g}{2} + \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}\sin^4\frac{g}{2} + \dots\right)$$

Eliminirt man $\sin^2\frac{g}{2}$ mit Hilfe der ersten Gleichung aus der zweiten, so entsteht:

$$\eta^2(\eta - 1) = m'\left[1 + \left(\frac{9}{10}\cdot\frac{m'}{\eta^2} - \frac{6}{5}l\right) + \left(\frac{27}{35}\cdot\frac{m'^2}{\eta^4} - \frac{72}{35}\cdot\frac{m'l}{\eta^2} + \frac{48}{35}l^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{9}{14}\cdot\frac{m'^3}{\eta^6} - \frac{18}{7}\cdot\frac{m'^2 l}{\eta^4} + \frac{24}{7}\cdot\frac{m'l^2}{\eta^2} - \frac{32}{21}l^3\right) + \dots\right]$$

Daraus gewinnt man durch denselben Process wie Hansen:

$$\eta = 1 + m' - \left(\frac{11}{10}m'^2 + \frac{6}{5}m'l\right) + \left(\frac{83}{35}m'^3 + \frac{96}{35}m'^2 l + \frac{48}{35}m'l^2\right) -$$
$$- \left(\frac{2229}{350}m'^4 + \frac{1566}{175}m'^3 l + \frac{864}{175}m'^2 l^2 + \frac{32}{21}m'l^3\right) + \dots$$

Die Glieder vierter Ordnung $\left(\frac{11}{10}m'^2 + \frac{6}{5}m'l\right)$ kann man wegschaffen durch Einführen der neuen Variabelen $\varkappa$ mittelst der Relation:

$$m' = \varkappa\left(1 + \frac{11}{10}\varkappa\right)\left(1 + \frac{6}{5}l\right).$$

Man erhält dann:

$$\eta = 1 + \varkappa - \left(\frac{17}{350}\varkappa^3 - \frac{18}{175}\varkappa^2 l + \frac{12}{175}\varkappa l^2\right) + \left(\frac{883}{7000}\varkappa^4 - \frac{162}{875}\varkappa^3 l - \frac{12}{875}\varkappa^2 l^2 + \frac{64}{525}\varkappa l^3\right) - \dots$$

Da $\varkappa$ und l sehr kleine Grössen sind, ist hinreichend genau:

$$\eta = 1 + \varkappa,$$

[1] Hansen, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers. Ber. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1863, S. 121.

wobei $\varkappa$ gegeben ist durch

$$\varkappa + \frac{11}{10}\varkappa^2 = \frac{m'}{1+\frac{6}{5}l} = h'.$$

Aus h' lässt sich $\varkappa$ sehr leicht finden, entweder:

1. wie bei Hansen durch Auflösen in einen Kettenbruch:

$$\varkappa = \cfrac{h'}{1+\cfrac{1\cdot 1h'}{1+\cfrac{1\cdot 1h'}{1+\ldots}}}$$

$$\log(1\cdot 1) = 0.041393$$

oder auch

2. durch trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichung mittelst des Hilfswinkels:

$$\operatorname{tg}\zeta = \sqrt{\frac{22h'}{5}} = \overline{0\cdot 321727}\sqrt{h'}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{10h'}{11}}\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = \overline{9\cdot 979303}\sqrt{h'}\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}.$$

Die erste Partie von l:

$$\lambda = \frac{r_a + r_b - 2\sqrt{r_a r_b}}{\sqrt{r_a r_b}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}} + \sqrt{\frac{r_b}{r_a}} - 2$$

wird gewöhnlich berechnet durch Einführung des Hilfswinkels:

$$\operatorname{tg}(45+\omega) = \sqrt[4]{\frac{r_b}{r_a}}$$

$$\lambda = 4\operatorname{tg}^2 2\omega.$$

Etwas einfacher und mindestens eben so sicher erhält man aber λ folgendermassen. Sei zur Abkürzung:

$$\frac{r_b - r_a}{r_a} = y$$

so ist:

$$\lambda = (1+y)^{\frac{1}{2}} + (1+y)^{-\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{4}y^2\left[1 - y + \frac{15}{16}y^2 - \frac{7}{8}y^3 + \frac{105}{128}y^4 - \frac{715}{1028}y^5 \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4}y^2\left[\frac{1}{1+y} - \frac{1}{16}\cdot\frac{y^2}{(1+y)^2} + \frac{1}{128}y^4 + \frac{53}{1024}y^5 \ldots\right] = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{y^2}{1+y}\right) - \frac{1}{64}\cdot\left(\frac{y^2}{1+y}\right)^2 + \frac{1}{512}y^6 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(r_b - r_a)^2}{r_a r_b}\left[1 - \frac{1}{16}\cdot\frac{(r_b - r_a)^2}{r_a r_b}\right] + \frac{1}{512}\left(\frac{r_b - r_a}{r_a}\right)^6 + \frac{53}{4096}\cdot\left(\frac{r_b - r_a}{r_a}\right)^8 +$$

oder für:

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{(r_b - r_a)^2}{r_a r_b} = w$$

mehr als hinreichend genau:

$$\lambda = 4w(1-w)$$

$$l = \frac{w - w^2 + \sin^2\frac{f}{2}}{\cos f}$$

wo w^2 nur selten merkbar sein wird.

Die Berechnung von η nach diesen Formeln stellt sich demnach so:

$$18)\left\{\begin{aligned} w &= \frac{1}{16}\cdot\frac{(r_b-r_a)^2}{r_a r_b} \\ \operatorname{tg} p &= \frac{\sqrt{w(1-w)}}{\sin\frac{f}{2}} \\ l &= \frac{\sin^2\frac{f}{2}}{\cos f\cos p^2} \\ m' &= \frac{\theta^2}{6(\sqrt{r_a r_b}\cos f)^3} \\ h' &= \frac{m'}{1+\frac{6}{5}l} \qquad \log\left(\frac{6}{5}\right) = 0\cdot079181 \\ \operatorname{tg}\zeta &= \overline{0\cdot321727}\sqrt{h'} \qquad \varkappa = \overline{9\cdot979303}\sqrt{h'}\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} \end{aligned}\right.$$

oder:

$$\varkappa = \cfrac{h'}{1+\cfrac{1\cdot1h'}{1+\cfrac{1\cdot1h'}{1+\ldots}}} \qquad \log(1\cdot1) = 0\cdot041393$$

$$\eta - 1 = \varkappa$$

Nach Durchführung der Hypothesen benöthigt man für die Berechnung der Elemente noch:

$$\sin^2\frac{g}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{m'}{\eta^2} - l$$

$$\operatorname{tg}2\omega = \sqrt{w-w^2}$$

§. 9.

Zusammenstellung der Formeln für die Bahnbestimmung eines Asteroiden, so lange die Beobachtungen nur ein Intervall von 30 bis 40 Tagen umschliessen.

Die vorstehenden Untersuchungen haben ergeben, dass es in der Regel zu sehr weitläufigen Rechnungen führen würde, wollte man bei einer ersten Bahnbestimmung eines Kometen die Excentricität unbestimmt lassen. Dies geschieht in der Praxis wohl auch nie; man berechnet für einen solchen Himmelskörper stets zuerst eine Parabel, und geht auf eine Ellipse erst über, wenn diese nicht genügt. Dann liefert aber die Parabel bereits Näherungswerthe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, und man wird es jedenfalls vorziehen, die neue Rechnung auf diese aufzubauen, statt sie so anzulegen, als ob die Bahn völlig unbekannt wäre. Wir werden daher hier zunächst nur die Berechnung einer Asteroidenbahn ins Auge fassen.

Ich nehme dabei als selbstverständlich an, dass man bei einer ersten Bahnbestimmung nicht eine übertriebene, übrigens auch ganz nutzlose Genauigkeit, etwa durch Berücksichtigung der Sonnenbreiten, Einführung des Locus fictus u. s. w. anstrebt. Denn in einem solchen Falle könnte natürlich von Kürzungen der Formeln überhaupt nicht die Rede sein, da es nicht am Platze wäre, an einigen Stellen mit besonderer Rigorosität vorzugehen, an anderen hingegen sich beträchtliche Vernachlässigungen zu erlauben. Ich nehme daher an, dass an die Beobachtungen keine Correctionen wegen Sonnenbreite, Parallaxe und Aberration angebracht werden, sondern dass man sie einfach mit der scheinbaren Schiefe der Ekliptik in Länge und Breite verwandelt, die erstere mit Nutation und Präcession auf den Anfang des

Jahres reducirt, und die so erhaltenen Coordinaten, sowie die mittleren Sonnencoordinaten der Rechnung zu Grunde legt.

Dies vorausgesetzt, kann man, wenn das Intervall der äussersten Beobachtungen 30 bis 40 Tage nicht überschreitet, und diese nicht gar zu ungünstig vertheilt sind, dem Obigen zufolge φ_m, Φ_m und P'_m in die nachstehenden Ausdrücke abkürzen:

$$\varphi_m = \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2} g_1 \sin(G_1 - Q_m) \cdot \frac{1}{r_2^3}$$

$$\Phi_m = \frac{\theta_1 A_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2} g_1 \sin(G_1 - Q_m) \cdot \frac{1 + 0 \cdot 1\,\theta_2^2}{R_2^3}$$

$$P'_m = \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2} g_1 \sin(G_1 - Q_m) \left[\frac{1 + 0 \cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right]$$

Die anzuwendenden Gleichungen lauten demnach, aus den Entwicklungen dieser Abhandlung zusammengestellt, und in Bezug auf die Berechnung der Elemente aus den Differenzen der wahren und excentrischen Anomalie durch die Formeln der Theoria motus ergänzt:

I.

$$\theta_1 = k(t_3 - t_2) \qquad \theta_2 = k(t_3 - t_1) \qquad \theta_3 = k(t_2 - t_1) \qquad \log k = 8 \cdot 235581\,4$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6}(\theta_1 + \theta_2)\,\theta_3 \qquad \mu_3 = \frac{1}{6}(\theta_2 + \theta_3)\,\theta_1$$

Probe:

$$\mu_3 - \mu_1 = \frac{1}{6}\,\theta_2\,(\theta_3 - \theta_1).$$

II.

$$g_1 \sin(G_1 - L_1) = (\theta_2 + \theta_3)\, R_3 \sin(L_3 - L_1)$$

$$g_1 \cos(G_1 - L_1) = (\theta_2 + \theta_3)\, R_3 \cos(L_3 - L_1) + (\theta_1 + \theta_2)\, R_1$$

III.

$$q_1 \sin(Q_1 - \lambda_2) = \sin(\lambda_2 - \lambda_3)$$

$$q_1 \cos(Q_1 - \lambda_2) = -\cos(\lambda_2 - \lambda_3) + \operatorname{tg}\beta_3 \operatorname{ctg}\beta_2$$

$$q_2 \sin(Q_2 - \lambda_1) = \sin(\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$q_2 \cos(Q_2 - \lambda_1) = -\cos(\lambda_1 - \lambda_3) + \operatorname{tg}\beta_3 \operatorname{ctg}\beta_1$$

$$q_3 \sin(Q_3 - \lambda_2) = \sin(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$q_3 \cos(Q_3 - \lambda_2) = +\cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{ctg}\beta_2$$

Probe:

$$q_1 q_3 \sin(Q_1 - Q_3) = q_2 q_3 \sin(Q_2 - Q_3) = q_1 q_2 \sin(Q_1 - Q_2) \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{ctg}\beta_3.$$

IV.

$$\gamma = \frac{g_1}{6 \sin(Q_1 - Q_3)}$$

$$W_2 = \frac{\theta_1}{q_1} \cdot \frac{\theta_3}{q_3} \cdot \frac{q_2}{\theta_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2}\, \gamma \sin(G_1 - Q_2)$$

$$W_1'' = \frac{\theta_3}{q_3} \cdot \gamma \sin(G_1 - Q_1)$$

$$W_3'' = \frac{\theta_1}{q_1} \cdot \gamma \sin(G_1 - Q_3)$$

V.

$$\rho_2 = W_2\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

$$\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\rho_1' = W_1'\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

$$\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\rho_3' = W_3'\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

ρ_2 ist die wahre, ρ_1' und ρ_3' sind curtirte Distanzen. Aus der ersten dieser Gleichungen ist r_2 zu suchen; sie steigt, gehörig geordnet, auf eine achten Grades an. Gauss hat sie durch Einführen des Winkels z am Planeten aus dem Dreiecke Planet, Sonne, Erde in eine sehr einfache Form gebracht, in der ihre indirecte Auflösung sich ohne Schwierigkeit bewerkstelligen lässt. Trotzdem scheint mir der folgende Rechnungsmechanismus bequemer.

VI.

$$\cos\psi_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$

$$B_2 = R_2 \sin\psi_2$$

$$f_2 = R_2 \cos\psi_2$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{\rho_2 - f_2}{B_2}$$

$$r_2 = B_2 \sec\vartheta_2.$$

Einen passenden Näherungswerth für den Beginn der Rechnung gibt $\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{12}$ $(r = 2\cdot 3)$ ab, wenn man nicht aus anderen Anzeichen — wie auffallend starker oder schwacher Bewegung des Planeten — guten Grund hat zu vermuthen, dass er verhältnissmässig nahe oder entfernt steht, und danach für r_2^3 gleich anfangs noch eine plausiblere Annahme machen kann. Damit erhält man aus der ersten Gleichung von V einen Näherungswerth ρ_2^0 für ρ_2, dann aus VI einen verbesserten Werth für r_2 u. s. w.

Aus r_2 findet man dann durch die beiden letzten Gleichungen von V sofort ρ_1' und ρ_3' und aus diesen den heliocentrischen Ort und die Elemente, wie folgt.

VII.

$$r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) = \rho_1' \cos(\lambda_1 - L_1) - R_1$$

$$r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) = \rho_1' \sin(\lambda_1 - L_1)$$

$$r_1 \sin b_1 = \rho_1' \operatorname{tg}\beta_1,$$

und ebenso r_3, b_3, l_3 aus $\rho_3', \lambda_3, \beta_3$; R_3, L_3. Hierauf:

VIII.

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(l_1 - \Omega)\sec i \qquad \operatorname{tg} u_3 = \operatorname{tg}(l_3 - \Omega)\sec i.$$

Die u sind in demselben Quadranten wie die $l - \Omega$ anzunehmen.

IX.

$$2f_2 = u_3 - u_1 = v_3 - v_1$$

$$m' = \frac{\theta_2^2}{6(\sqrt{r_1 r_3}\cos f_2)^3}$$

$$w = \frac{1}{16} \cdot \frac{(r_3 - r_1)^2}{r_1 r_3}$$

$$\mathrm{tg}\, 2\omega = \sqrt{w(1-w)}$$

$$\mathrm{tg}\, p = \frac{\mathrm{tg}\, 2\omega}{\sin \frac{f_2}{2}}$$

$$l = \sin^2 \frac{f_2}{2} \sec^2 p \sec f_2$$

$$h' = \frac{m'}{1 + \frac{6}{5} l} \qquad \log \frac{6}{5} = 0 \cdot 079181$$

$$\mathrm{tg}\, \zeta = \sqrt{\frac{22}{5} h'} \qquad \text{oder} \quad \varkappa = \cfrac{h'}{1 + \cfrac{1 \cdot 1\, h'}{1 + \cfrac{1 \cdot 1\, h'}{1 + \dots}}}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{10}{11} h'}\, \mathrm{tg} \frac{\zeta}{2}$$

$$\log \sqrt{\frac{22}{5}} = 0 \cdot 321727 \qquad \log (1 \cdot 1) = 0 \cdot 041393$$

$$\log \sqrt{\frac{10}{11}} = 9 \cdot 979303$$

$$\eta - 1 = \varkappa$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} g_2 = \frac{3}{4} \frac{m'}{\eta^2} - l \qquad \log \left(\frac{3}{4}\right) = 9 \cdot 875061.$$

X.

$$T \sin \frac{1}{2} (F_2 - G_2) \cos \frac{1}{2} \varphi = \cos \frac{1}{2} (f_2 + g_2)\ \mathrm{tg}\, 2\omega$$

$$T \cos \frac{1}{2} (F_2 - G_2) \cos \frac{1}{2} \varphi = \sin \frac{1}{2} (f_2 + g_2) \sec 2\omega$$

$$T \sin \frac{1}{2} (F_2 + G_2) \sin \frac{1}{2} \varphi = \cos \frac{1}{2} (f_2 - g_2)\ \mathrm{tg}\, 2\omega$$

$$T \cos \frac{1}{2} (F_2 + G_2) \sin \frac{1}{2} \varphi = \sin \frac{1}{2} (f_2 - g_2) \sec 2\omega$$

$$E_3 = G_2 + g_2 \qquad v_3 = F_2 + f_2$$

$$E_1 = G_2 - g_2 \qquad v_1 = F_2 - f_2$$

Probe:

$$T = \sin g_2 \sqrt[4]{\frac{a^2}{r_1 r_3}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 5\, m' \cos f_2}}{\eta}$$

XI.

$$a = \frac{\sin f_2 \sqrt{r_1 r_3}}{\sin g_2 \cos \varphi} \qquad e'' = \overline{5 \cdot 314425\, 1} \sin \varphi$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad M_3 = E_3 - e'' \sin E_3$$

$$M_1 = E_1 - e'' \sin E_1$$

$$\log k'' = 3 \cdot 550006\, 6 \qquad \mu = \frac{M_3 - M_1}{t_3 - t_1}$$

§. 10.

Vergleichung der Formeln mit den ursprünglich von Gauss angewendeten.

Die im vorigen Paragraphe von mir bei einer ersten Bahnbestimmung eines Asteroiden zur Ermittlung von ρ_2 vorgeschlagene Gleichung

$$\rho_2 = W_2\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

ähnelt derjenigen, welche Gauss anfänglich zur Berechnung einer Planetenbahn verwendete, derart, dass es mir nicht ohne Interesse scheint, den Unterschied beider Formeln genauer darzulegen.

Zu diesem Zwecke wollen wir ausgehen von den beiden schon mehrmals benützten Gleichungen:

$$V_2\rho_2' = \frac{n_1}{n_2}A_2 - B_2 + \frac{n_3}{n_2}C_2$$

$$0 = \frac{N_1}{N_2}A_2 - B_2 + \frac{N_3}{N_2}C_2.$$

Addiren wir dieselben, nachdem wir die erste mit $+\frac{N_1+N_3}{N_2}$ und die zweite mit $-\frac{n_1+n_3}{n_2}$ multiplicirt haben, so entsteht:

$$19)\qquad \frac{N_1+N_3}{N_2}V_2\rho_2' = \left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{N_3}{N_2} - \frac{n_3}{n_2}\cdot\frac{N_1}{N_2}\right)(A_2 - C_2) + \left(\frac{n_1+n_3}{n_2} - \frac{N_1+N_3}{N_2}\right)B_2.$$

Dies ist, nur in anderer Schreibweise, die von Gauss auf S. 209 seiner unten citirten Abhandlung [1] mit 1) bezeichnete Gleichung. In derselben vernachlässigt er das erste Glied rechter Hand als ein Glied höherer Ordnung, ersetzt den Factor $\frac{N_1+N_3}{N_2}$ von $V_2\rho_2'$ durch die Einheit, und gewinnt so S. 214 seine Fundamentalgleichung:

$$V_2\rho_2' = \frac{\theta_1\theta_3}{2}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)B_2,$$

aus deren Verbindung mit:

$$r_2^2 = R_2^2 + 2R_2\rho_2'\cos(\lambda_2 - L_2) + \rho_2'^2\sec^2\beta_2$$

r_2 berechnet wird.

Um das Mass der vorgekommenen Abkürzungen klar übersehen zu können, wollen wir uns Gleichung 19) genauer entwickeln. Benützt man dazu die im §. 3 unter 11) zusammengestellten Verhältnisse der Dreiecksflächen, so findet man ohne Schwierigkeit:

$$\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{N_3}{N_2} - \frac{n_3}{n_2}\cdot\frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_1\theta_3}{\theta_2}\Big[\frac{\theta_3-\theta_1}{6}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + \frac{\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_3}{4}(\chi - X) +$$
$$+ \frac{(\theta_3-\theta_1)(7\theta_2^2+6\theta_1\theta_3)}{360}\left(\frac{1}{r_2^6} - \frac{1}{R_2^6}\right) - \frac{3(\theta_3-\theta_1)(\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_3)}{40}(\psi - \Psi)\ldots\Big]$$

Weiter ist:

$$A_2 - C_2 = R_1\sin(Q_2 - L_1) - R_3\sin(Q_2 - L_3)$$

[1] Gauss, Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewendeten Methoden. v. Zach, Monat. Corresp. zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Bd. XX, S. 197—224.

Da dieser Ausdruck in ein noch dazu kleines Glied zweiter Ordnung multiplicirt erscheint, und selbst eine kleine Grösse ist, kann man sich in demselben weitgehende Kürzungen erlauben, und zwar zunächst annehmen: $R_1 = R_3 = R_2$. Es wird dann:

$$A_2 - C_2 = 2R_2 \cos\left(Q_2 - \frac{L_1+L_3}{2}\right) \sin\frac{L_3-L_1}{2}.$$

Setzt man darin weiter:

$$\frac{L_1+L_3}{2} = L_2$$

$$\sin\frac{L_3-L_1}{2} = \frac{L_3-L_1}{2} = \frac{\theta_2}{2}$$

und erinnert man sich, dass

$$B_2 = R_2 \sin(Q_2 - L_2),$$

so resultirt sehr einfach:

$$A_2 - C_2 = \theta_2 B_2 \operatorname{ctg}(Q_2 - L_2).$$

V_2 ist eine Grösse zweiter Ordnung: es genügt daher für den Factor $\frac{N_1+N_3}{N_2}$ anzunehmen:

$$\frac{N_1+N_3}{N_2} = 1 + \frac{\theta_1\theta_3}{2R_2^3} \doteq 1 + \frac{\theta_1\theta_3}{2}.$$

Endlich ist:

$$\frac{n_1+n_3}{n_2} - \frac{N_1+N_3}{N_2} = \frac{\theta_1\theta_3}{2}\left[\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + (\theta_3-\theta_1)(\chi - X) + \frac{\theta_2^2+\theta_1\theta_3}{12}\left(\frac{1}{r_2^6} - \frac{1}{R_2^6}\right) - \frac{\theta_2^2 - 3\theta_1\theta_3}{4}(\psi - \Psi)\ldots\right].$$

Das Product $\theta_1\theta_3$ kommt innerhalb der Hauptklammern erst in den Gliedern vierter Ordnung vor, und entfernt sich bei allen in der Praxis vorkommenden Fällen so wenig von $0 \cdot 24\,\theta_2^2$, dass wir es in so kleinen Gliedern ohne weiteres dadurch ersetzen, und schreiben dürfen:

$$\theta_1\theta_3 = 0 \cdot 24\theta_2^2$$

$$\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_3 = 0 \cdot 52\theta_2^2 \qquad \theta_2^2 + \theta_1\theta_3 = 1 \cdot 24\theta_2^2$$

$$\theta_2 - 3\theta_1\theta_3 = 0 \cdot 28\theta_2^2 \qquad 7\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_3 = 8 \cdot 44\theta_2^2.$$

Durch Zusammenfassen aller dieser Kürzungen bekommt man bis auf Glieder vierter Ordnung einschliesslich genau:

$$(1+0 \cdot 12\theta_2^2)\, V_2\rho_2' = \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 B_2\left[\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + (\theta_3-\theta_1)(\chi - X) + 0 \cdot 10\theta_2^2\left(\frac{1}{r_2^6} - \frac{1}{R_2^6}\right) -\right.$$

$$\left. - 0.07\theta_2^2(\psi - \Psi) + \operatorname{ctg}(Q_2 - L_2)\left\{\frac{\theta_3-\theta_1}{3}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + 0 \cdot 14\theta_2^2(\chi - X)\right\}\right].$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder vierter Ordnung, mit Ausnahme des grössten derselben: $\frac{0 \cdot 10\,\theta_2^2}{R_2^6} \doteq \frac{0 \cdot 10\,\theta_2^2}{R_2^3}$, so entsteht:

$$(1+0 \cdot 12\theta_2^2)\, V_2\rho_2' = \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 B_2\left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1+0 \cdot 10\theta_2^2}{R_2^3} + \frac{1}{3}(\theta_3-\theta_1)\operatorname{ctg}(Q_2 - L_2)\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + (\theta_3-\theta_1)(\chi - X)\right],$$

oder etwas einfacher:

$$V_2\rho_2' = \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 B_2\left[\frac{1-0 \cdot 12\theta_2^2}{r_2^3} - \frac{1-0.02\theta_2^2}{R_2^3} + \frac{1}{3}(\theta_3-\theta_1)\operatorname{ctg}(Q_2 - L_2)\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + (\theta_3-\theta_1)(\chi - X)\right].$$

Der Fehler von Gauss' Annahme beträgt demnach:

$$(V_2\rho_2')_R-(V_2\rho_2')_G=\frac{1}{2}\theta_1\theta_3B_2\left[\frac{1}{3}(\theta_3-\theta_1)\operatorname{ctg}(Q_2-L_2)\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)+(\theta_3-\theta_1)(\chi-X)-\frac{0\cdot 12\theta_2^2}{r_2^3}+\frac{0\cdot 02\theta_2^2}{R_2^3}\right],$$

während der Fehler meiner Gleichung, bis auf denselben Grad der Genauigkeit angesetzt, sich beläuft auf:

$$(V_2\rho_2')_R-(V_2\rho_2')_W=\frac{\theta_1\theta_3}{4\theta_2}g_2\sin(Q_2-G_2)(\chi-X),$$

wozu noch zu bemerken kommt, dass g_2 eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist, von χ und X das letztere stets, das erstere aber mindestes bei den Asteroiden ebenfalls sehr klein bleibt.

Meine Gleichung ist daher bei derselben Einfachheit genauer als die von Gauss, obwohl auch bei ihr die vernachlässigten Glieder bei nahe gleichen Zwischenzeiten von sehr geringer Bedeutung sind. Sind jedoch die Zwischenzeiten ziemlich ungleich, so kann das eine dieser:

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\theta_3-\theta_1}{R_2^3}\operatorname{ctg}(Q_2-L_2)=-\frac{1}{3}(\theta_3-\theta_1)\operatorname{ctg}(Q_2-L_2)$$

immerhin einen sehr merklichen Werth annehmen und schon recht störend einwirken. Darin scheint mir auch die Hauptursache zu liegen, warum Gauss diese Gleichung später verliess; denn Hansens Kritik derselben am Schlusse seiner schon wiederholt citirten Abhandlung über Bahnbestimmung aus drei Orten, halte ich in manchen Punkten nicht für zutreffend.

§. 11.

Elimination des mittleren Radius-Vector.

Der Radius-Vector des mittleren Planetenortes (r_2) spielt bloss die Rolle einer Hilfs- oder richtiger Zwischengrösse, die später nicht weiter gebraucht wird. Da aber r_1 und r_3 von r_2 nur um Grössen erster Ordnung abweichen und daher durch Ersetzen von r_2 durch dieselben nur noch weitere Grössen solcher Rangordnungen weggeworfen werden, welche wir ohnehin schon vernachlässigt haben, kann man die Berechnung desselben ganz umgehen und Rechnungsvorschriften entwickeln, die manchem bequemer und einfacher erscheinen dürften. Sie mögen daher hier angeführt werden.

Wir schreiben also die Fundamentalgleichungen für ρ_1' und ρ_3':

$$\left(1+\frac{\rho_1}{r_1^3}\right)\rho_1'=W_1'\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)$$

$$\left(1+\frac{\rho_3}{r_3^3}\right)\rho_3'=W_3'\left(\frac{1+0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3}-\frac{1}{r_3^3}\right).$$

Es sind jetzt statt wie früher bloss ein Radius (r_2) deren zwei r_1 und r_3 durch eine indirecte Rechnung zu bestimmen, wobei freilich zu bemerken kommt, dass, wenn man den einen, z. B. r_1 ermittelt hat, dieser für die Berechnung des anderen r_3 gleich anfangs einen so genäherten Werth abgibt, dass die Wiederholung der Rechnung kaum nöthig werden dürfte. Andererseits fällt die Berechnung der Hilfsgrössen q_2 und Q_2, sowie die von r_2 weg. Ausserdem wird es nun zweckmässiger sein nicht die curtirten Distanzen ρ_1' und ρ_3', sondern gleich die wahren ρ_1 und ρ_3 zu suchen.

Die Modificationen, die durch alles dies in unserem früheren Formelsysteme anzubringen sind, sind die folgenden:

I und II bleiben unverändert.

Bei III fällt die Berechnung von q_2 und Q_2 weg, es entfällt damit aber auch die Probegleichung.

IV bis VI sind durch die folgenden zu ersetzen:

IV*

$$\gamma = \frac{g_1}{6 \sin (Q_1 - Q_3)}$$

$$W_1 = \frac{\theta_3}{q_3} \cdot \gamma \sin (G_1 - Q_1) \sec \beta_1$$

$$W_3 = \frac{\theta_1}{q_1} \cdot \gamma \sin (G_1 - Q_3) \sec \beta_3.$$

V.*

$$\left(1 + \frac{\mu_1}{r_1^3}\right) \rho_1 = W_1 \left(\frac{1 + 0 \cdot 1 \theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_3}{r_3^3}\right) \rho_3 = W_3 \left(\frac{1 + 0 \cdot 1 \theta_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{r_3^3}\right).$$

VI*

$$\cos \psi_1 = \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1) \qquad \cos \psi_3 = \cos \beta_3 \cos (\lambda_3 - L_3)$$

$$B_1 = R_1 \sin \psi_1 \qquad B_3 = R_3 \sin \psi_3$$

$$f_1 = R_1 \cos \psi_1 \qquad f_3 = R_3 \cos \psi_3$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\rho_1 - f_1}{B_1} \qquad \operatorname{tg} \vartheta_3 = \frac{\rho_3 - f_3}{B_3}$$

$$r_1 = B_1 \sec \vartheta_1 \qquad r_3 = B_3 \sec \vartheta_3.$$

Man wird auch hier wieder von $\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{12}$ oder einem anderen plausibeleren Werthe ausgehen, dann aber, wenn man r_1 gefunden hat, dies als erste Hypothese für r_3 einsetzen.

Auch VII erfährt noch eine Änderung, nämlich:

VII*

$$r_1 \cos b_1 \cos (l_1 - L_1) = \rho_1 \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1) - R_1$$

$$r_1 \cos b_1 \sin (l_1 - L_1) = \rho_1 \cos \beta_1 \sin (\lambda_1 - L_1)$$

$$r_1 \sin b_1 = \rho_1 \sin \beta_1$$

und ebenso r_3, l_3, b_3.

Die übrigen Formelsysteme VIII bis XI bleiben ungeändert.

Es wurde oben gesagt, dass durch das Ersetzen von r_2 durch r_1 und r_3 blos wieder Grössen derselben Ordnung wie früher vernachlässigt werden. Dies ist zwar richtig; allein es werden dadurch, wie man leicht nachweisen kann, die Coëfficienten der Glieder höherer Ordnung beträchtlich vergrössert. Bei sonnenfernen Asteroiden und solchen mit geringer Excentricität hat dies allerdings nichts zu bedeuten; bei sonnennahen hingegen und stark excentrischen Bahnen wird man aber jetzt nicht mehr mit derselben Zuversicht behaupten können, dass die im §. 7 angegebenen Genauigkeitsgrenzen eingehalten sind. Dieser Übelstand lässt sich indess auf eine sehr einfache Weise beseitigen. Hat man nämlich r_1 und r_3 berechnet, so lässt sich daraus ein sehr genauer Werth von r_2 ableiten:

$$\log r_2 = \log r_1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} (\log r_3 - \log r_1)$$

$$= \log r_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2} (\log r_3 - \log r_1).$$

Setzt man nun diesen Werth statt r_1 und r_3 in V* ein, so erhält man ρ_1 und ρ_3 bis auf geringfügige Kleinigkeiten so genau wie früher; sobald dies aber nöthig wird, dürfte durch das Rechnen nach dieser Methode kaum eine nennenswerthe Zeitersparniss erzielt werden.

§. 12.

Zusammenstellung der Formeln bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung.

Will man sich mit der durch die frühere Methode erreichbaren Annäherung an die Wahrheit nicht begnügen, sondern beabsichtigt man eine vollständige Darstellung der Beobachtungen zu erzielen, so leisten unsere Formeln auch dies ohne besondere Mehrarbeit, wenn man nur die Rechnung schon vom Beginne an anders anordnet.

In dieser Richtung ist vor Allem zu bemerken, dass es nun nicht mehr zweckmässig wäre, bei der Erde für das Verhältniss der Dreiecksflächen Näherungswerthe einzusetzen, weil man bei einer schärferen Rechnung auch die Glieder [II] und [IV] mitnehmen müsste, daher mit der Einführung von Näherungen kein nennenswerther Vortheil mehr verknüpft wäre. Wir verwenden deshalb jetzt die rechte Seite unserer Grundgleichungen in der Form 6):

$$P_m = \frac{n_1}{n_2} A_m + \frac{n_3}{n_2} C_m - B_m = \varphi_m - B_m.$$

Das von uns als IV bezeichnete Glied erreicht, wie wir gesehen haben, für Asteroiden bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nie einen erheblichen Betrag, und in II kann man nach dem am Ende des §. 7 beigebrachten $\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)$ ohne Nachtheil durch $\frac{r_3 - r_1}{\theta_2}$ ersetzen, und erhält so mit einer stets genügenden Genauigkeit:

$$P_m = \frac{\theta_1 A_m - \theta_2 B_m + \theta_3 C_m}{\theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_3}{6\theta_2} \cdot g_1 \sin (G_1 - Q_m) \frac{1}{r_2^3}\left[1 + \frac{0 \cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right] - \frac{\theta_1 \theta_3}{4\theta_2^2} \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_2^4} \cdot g_2 \sin (G_2 - Q_m) \,..$$

Der Ausdruck: $\frac{\theta_1}{\theta_2} A_m - B_m + \frac{\theta_3}{\theta_2} C_m$, dessen einzelne Glieder im Allgemeinen endlich sind, sinkt bekanntlich auf eine Grösse zweiter Ordnung herab; es wird sich daher, wenigstens bei kurzen Intervallen, empfehlen, seine Bestandtheile mit Logarithmen von einer Decimale mehr zu berechnen, als man im weiteren Verlaufe der Arbeit beibehalten will, da die Bahnbestimmung, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, sich fast ausschliesslich gerade auf dieses Glied stützt. Die Berechnung desselben erleichtern dann die folgenden Hilfsgrössen, die etwas einfacher werden, wenn man den Winkel G_0, wie es später geschehen wird, vom Punkte L_1 aus zählt:

$$g_0 \sin G_0 = \theta_1 R_1 \sin L_1 - \theta_2 R_2 \sin L_2 + \theta_3 R_3 \sin L_3$$

$$g_0 \cos G_0 = \theta_1 R_1 \cos L_1 - \theta_2 R_2 \cos L_2 + \theta_3 R_3 \cos L_3$$

$$\theta_1 A_m - \theta_2 B_m + \theta_3 C_m = g_0 \sin (G_0 - Q_m)$$

In den Factoren $\frac{n_1}{n_2}$ und $\frac{n_3}{n_2}$ von ρ_1' und ρ_3' auf der linken Seite wäre es ganz überflüssig, die Glieder höherer Ordnung zu berücksichtigen, da man sich leicht überzeugen kann, dass sie im Logarithmus dieser Quotienten höchstens einige Einheiten der sechsten Decimale austragen können; wir setzen daher wie früher:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right] \qquad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right].$$

Das Glied: $\frac{\theta_1\theta_3}{4\theta_2^2}\cdot\frac{r_3-r_1}{r_2^4}g_2\sin(G_2-Q_m)$ lässt sich erst in Rechnung ziehen, nachdem man bereits genäherte Werthe von r_3 und r_1 kennt; es ist aber stets so klein, dass dessen nachträgliche Berücksichtigung mittelst Differentialformeln sich leicht bewerkstelligen lässt.

Schreiben wir nämlich für den Augenblick Kürze halber:

$$V_1 = q_3\sin(Q_1-Q_3)\cos\beta_1$$

$$V_2 = \frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}.q_3\sin(Q_1-Q_3)$$

$$V_3 = q_1\sin(Q_1-Q_3)\cos\beta_3$$

$$\frac{\theta_1\theta_3}{6}g_1 = p_1 \qquad \frac{\theta_1\theta_3}{4\theta_2}g_2 = p_2',$$

so lauten unsere Fundamentalgleichungen:

$$\theta_1\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)V_1\rho_1 = g_0\sin(G_0-Q_1)-p_1\sin(G_1-Q_1).\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)-p_2'\sin(G_2-Q_1)\frac{r_3-r_1}{r_2^4}$$

$$\theta_2V_2\rho_2 = g_0\sin(G_0-Q_2)-p_1\sin(G_1-Q_2).\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)-p_2'\sin(G_2-Q_2)\frac{r_3-r_1}{r_2^4}$$

$$\theta_3\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)V_3\rho_3 = g_0\sin(G_0-Q_3)-p_1\sin(G_1-Q_3).\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)-p_2'\sin(G_2-Q_3)\frac{r_3-r_1}{r_2^4}.$$

Berechnet man dieselben zunächst unter der Supposition $\frac{r_3-r_1}{r_2^4}=0$, so erhält man für die Correctionen, die in Folge dessen nachträglich anzubringen sind, wenn man beim Differentiren die Glieder $1+\frac{\mu_1}{r_2^3}$ und $1+\frac{\mu_3}{r_2^3}$ als constant ansieht und $\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}$ vernachlässigt:

$$\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\theta_1V_1d\rho_1 = -p_2'\sin(G_2-Q_1).\frac{r_3-r_1}{r_2^4}+3p_1\sin(G_1-Q_1)\frac{dr_2}{r_2^4}$$

$$\theta_2V_2d\rho_2 = -p_2'\sin(G_2-Q_2).\frac{r_3-r_1}{r_2^4}$$

$$\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\theta_3V_3d\rho_3 = -p_2'\sin(G_2-Q_3).\frac{r_3-r_1}{r_2^4}+3p_1\sin(G_1-Q_3)\frac{dr_2}{r_2^4}.$$

Dies liefert in Verbindung mit:

$$dr_2 = \sin\vartheta_2\,d\rho_2$$

$$d(\log\rho_1) = \frac{M}{\rho_1}d\rho_1 \qquad d(\log\rho_3) = \frac{M}{\rho_3}d\rho_3$$

$$\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\theta_1V_1\rho_1.d(\log\rho_1) = -Mp_2'\left[\frac{3p_1\sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2V_2r_2^4}\sin(G_1-Q_1)+\sin(G_2-Q_1)\right]\frac{r_3-r_1}{r_2^4}$$

$$\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\theta_3V_3\rho_3.d(\log\rho_3) = -Mp_2'\left[\frac{3p_1\sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2V_2r_2^4}\sin(G_1-Q_3)+\sin(G_2-Q_3)\right]\frac{r_3-r_1}{r_2^4}.$$

Diese Ausdrücke berechnen sich sehr leicht und rasch, da man $\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\theta_1V_1\rho_1$, $\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\theta_3V_3\rho_3$, und θ_2V_2 schon von früher her besitzt. Sie lassen sich übrigens durch Einführen von Hilfsgrössen noch etwas zusammenziehen, nämlich:

$$s \sin S = \frac{3p_1 \sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2 V_2 r_2^4}\sin G_1 + \sin G_2$$

$$s \cos S = \frac{3p_1 \sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2 V_2 r_2^1}\cos G_1 + \cos G_2$$

$$\frac{3p_1 \sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2 V_2 r_2^4}\sin(G_1-Q_1) + \sin(G_2-Q_1) = s\sin(S-Q_1)$$

$$\frac{3p_1 \sin(G_2-Q_2)\sin\vartheta_2}{\theta_2 V_2 r_2^4}\sin(G_1-Q_3) + \sin(G_2-Q_3) = s\sin(S-Q_3).$$

Die Rechnung gestaltet sich hiernach folgendermassen:

I.*

$$\theta_1 = k(t_3-t_2) \qquad \theta_2 = k(t_3-t_1) \qquad \theta_3 = k(t_2-t_1) \qquad \log k = 8\cdot235581\ 4$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6}(\theta_1+\theta_2)\,\theta_3 \qquad \mu_3 = \frac{1}{6}(\theta_2+\theta_3)\,\theta_1$$

$$\nu_1 = (\theta_2\theta_3-\theta_1^2) \qquad \nu_3 = (\theta_1\theta_2-\theta_3^2)$$

Probe.

$$\mu_1-\mu_3 = \frac{1}{12}(\nu_1-\nu_3).$$

II.*

$$g_0 \sin(G_0-L_1) = \theta_3 R_3 \sin(L_3-L_1) - \theta_2 R_2 \sin(L_2-L_1)$$

$$g_0 \cos(G_0-L_1) = \theta_1 R_1 + \theta_3 R_3 \cos(L_3-L_1) - \theta_2 R_2 \cos(L_2-L_1)$$

$$g_1 \sin(G_1-L_1) = (\theta_2+\theta_3) R_3 \sin(L_3-L_1)$$

$$g_1 \cos(G_1-L_1) = (\theta_1+\theta_2) R_1 + (\theta_2+\theta_3) R_3 \cos(L_3-L_1)$$

$$g_2 \sin(G_2-L_1) = -\nu_3 R_3 \sin(L_3-L_1)$$

$$g_2 \cos(G_2-L_1) = \nu_1 R_1 - \nu_3 R_3 \cos(L_3-L_1).$$

III.

Bleibt ungeändert.

IV.*

$$U_1 = \theta_1 q_3 \sin(Q_1-Q_3)\cos\beta_1$$

$$U_2 = \theta_2 q_3 \sin(Q_1-Q_3)\cdot\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}$$

$$U_3 = \theta_3 q_1 \sin(Q_1-Q_3)\cos\beta_3$$

$$\frac{\theta_1\theta_3}{6}g_1 = p_1 \qquad \frac{M}{4}\cdot\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_2}\cdot g_2 = p_2 \qquad \log\left(\frac{M}{4}\right) = 9\cdot035724$$

V.*

$$U_2\rho_2^0 = g_0 \sin(G_0-Q_2) - p_1 \sin(G_1-Q_2)\cdot\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot1\theta_2^2}{r_2^3}\right)$$

$$\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)U_1\rho_1^0 = g_0 \sin(G_0-Q_1) - p_1 \sin(G_1-Q_1)\cdot\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot1\theta_2^2}{r_2^3}\right)$$

$$\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)U_3\rho_3^0 = g_0 \sin(G_0-Q_3) - p_1 \sin(G_1-Q_3)\cdot\frac{1}{r_2^3}\left(1+\frac{0\cdot1\theta_2^2}{r_2^3}\right)$$

$$\cos\psi_1 = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \qquad \cos\psi_2 = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \qquad \cos\psi_3 = \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3)$$

$$B_1 = R_1 \sin\psi_1 \qquad B_2 = R_2 \sin\psi_2 \qquad B_3 = R_3 \sin\psi_3$$

$$f_1 = R_1 \cos\psi_1 \qquad f_2 = R_2 \cos\psi_2 \qquad f_3 = R_3 \cos\psi_3$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\rho_1^0 - f_1}{B_1} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{\rho_2^0 - f_2}{B_2} \qquad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\rho_3^0 - f_3}{B_3}$$

$$r_1 = B_1 \sec\vartheta_1 \qquad r_2 = B_2 \sec\vartheta_2 \qquad r_3 = B_3 \sec\vartheta_3.$$

VI**.

$$\frac{3p_1 \sin(G_2 - Q_2) \sin\vartheta_2}{\rho_2 V_2 r_2^4} = \sigma$$

$$s \sin(S - G_1) = \sin(G_2 - G_1)$$

$$s \cos(S - G_1) = \cos(G_2 - G_1) + \sigma$$

$$\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right) U_1 \rho_1^0 \, d(\log\rho_1) = -p_2 s \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_2^4} \cdot \sin(S - Q_1)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right) U_3 \rho_3^0 \, d(\log\rho_3) = -p_2 s \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_2^4} \cdot \sin(S - Q_3)$$

$$\log\rho_1 = \log\rho_1^0 + d(\log\rho_1)$$

$$\log\rho_3 = \log\rho_3^0 + d(\log\rho_3)$$

Hierauf hat man VII* und sodann VIII bis XI durchzurechnen.

§. 13.

Bahnverbesserung mit Hilfe bereits bekannter genäherter Elemente.

Die hier entwickelten Formeln sind auch ganz besonders geeignet zur Verbesserung einer bereits genähert bekannten Bahn, da man in diesem Falle nur die aus ihr folgenden Verhältnisse der Dreiecksflächen in:

$$P_m = \frac{n_1}{n_2} A_m + \frac{n_3}{n_2} C_m - B_m$$

einzusetzen hat, um sofort verbesserte Werthe für die geocentrischen Distanzen und damit auf die bekannte Art für die heliocentrischen Coordinaten zu erhalten, aus denen man sich, sobald man bis zu den Argumenten der Breite vorgedrungen ist, neue Werthe für $\frac{n_1}{n_2}$ und $\frac{n_3}{n_2}$ ableiten kann, um zu sehen, ob sie noch einer Verbesserung bedürfen.

Diese Verbesserung wird, wenn auch die Elemente, von denen man ausging, noch ziemlich fehlerhaft waren, im Allgemeinen doch nur geringfügig sein. Man wird daher in der Regel nicht nöthig haben, die Rechnung ganz zu wiederholen, sondern mit Differentialquotienten ausreichen, was sich hier sehr einfach gestaltet. Es ist nämlich:

$$dP_m = A_m d\frac{n_1}{n_2} + C_m d\frac{n_3}{n_2}$$

$$= \frac{n_1}{n_2} A_m d\log\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_3}{n_2} C_m d\log\left(\frac{n_3}{n_2}\right)$$

Nach diesen Vorbemerkungen bedarf das nun folgende Rechnungsschema keiner weiteren Erläuterung.

Man hat zuerst aus den vorhandenen Elementen: r_1, r_2, r_3; v_1, v_2, v_3 und damit:

$$n_1 = r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2)$$
$$n_2 = r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)$$
$$n_3 = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)$$

zu ermitteln, hierauf nach III (§. 9) die Hilfsgrössen: q_1, q_2, q_3, Q_1, Q_2, Q_3 und mit diesen zu bilden:

$$W_1 = \frac{n_1}{n_2} \cdot q_3 \sin(Q_1 - Q_3) \qquad W_3 = \frac{n_3}{n_2} \cdot q_1 \sin(Q_1 - Q_3)$$

$$W_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \cdot \, . q_3 \sin(Q_1 - Q_3),$$

die weitere Rechnung gestaltet sich dann, wie folgt:

$$R_1' = \frac{n_1}{n_2} R_1 \qquad R_3' = \frac{n_3}{n_2} R_3$$

$$A_1' = R_1' \sin(Q_1 - L_1) \qquad C_1' = R_3' \sin(Q_1 - L_3) \qquad B_1 = R_2 \sin(Q_1 - L_2)$$
$$A_2' = R_1' \sin(Q_2 - L_1) \qquad C_2' = R_3' \sin(Q_2 - L_3) \qquad B_2 = R_2 \sin(Q_2 - L_2)$$
$$A_3' = R_1' \sin(Q_3 - L_1) \qquad C_3' = R_3' \sin(Q_3 - L_3) \qquad B_3 = R_2 \sin(Q_3 - L_2)$$

$$W_1 \rho_1' = A_1' + C_1' - B_1$$
$$W_2 \rho_2' = A_2' + C_2' - B_2$$
$$W_3 \rho_3' = A_3' + C_3' - B_3$$

Mit den so erhaltenen Werthen von ρ_1', ρ_2' und ρ_3' berechnet man neue Werthe von r_1, r_2, r_3; n_1, n_2, n_3 und aus diesen von $\frac{n_1}{n_3}$ und $\frac{n_3}{n_2}$, und erhält dann:

$$(W_1 \rho_1') \cdot d(\log \rho_1') = A_1' d\left(\log \frac{n_1}{n_2}\right) + C_1' d\left(\log \frac{n_3}{n_2}\right) - (W_1 \rho_1') d\left(\log \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$(W_2 \rho_2') \cdot d(\log \rho_2') = A_2' d\left(\log \frac{n_1}{n_2}\right) + C_2' d\left(\log \frac{n_3}{n_2}\right)$$

$$(W_3 \rho_3') \cdot d(\log \rho_3') = A_3' d\left(\log \frac{n_1}{n_2}\right) + C_3' d\left(\log \frac{n_3}{n_2}\right) - (W_3 \rho_3') d\left(\log \frac{n_3}{n_2}\right).$$

$(W_1 \rho_1')$, $(W_2 \rho_2')$, $(W_3 \rho_3')$ bleiben ganz so wie früher.

Sind die Elemente, von denen man ausging, schon so richtig, dass man die Hoffnung hegt, die Verhältnisse der Dreiecksflächen werden keine Verbesserung mehr erfahren, dann bedarf man ρ_2' überhaupt nicht, wodurch sich die Arbeit noch wesentlich abkürzt, indem nun die Berechnung aller mit dem Index 2 versehener Grössen, von n_2 abgesehen, entfällt.

Die eben entwickelten Vorschriften gelten für den Fall, dass der vom Gestirne zurückgelegte Bogen bereits gross genug ist, um die Verhältnisse der Dreiecksflächen direct aus den Radien und Differenzen der wahren Anomalien ohne Zuhilfenahme der Sectoren mit genügender Schärfe berechnen zu können. Ist jedoch der Bogen so kurz, dass man es für gerathen hält, die Sectoren heranzuziehen, dann ist es zweckmässiger P_m folgendermassen umzustellen:

$$P_m = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} A_m + \frac{\theta_3}{\theta_2} C_m - B_m\right) + \frac{\theta_1}{\theta_2} A_m \cdot \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} + \frac{\theta_3}{\theta_2} C_m \frac{\eta_2 - \eta_3}{\eta_3}$$

Dabei wurde, wie allgemein üblich, gesetzt:

$$n_1 \eta_1 = \theta_1 \sqrt{p}\,; \qquad n_2 \eta_2 = \theta_2 \sqrt{p}\,; \qquad n_3 \eta_3 = \theta_3 \sqrt{p}$$

η_1, η_2, η_3 sind nach IX (§. 9) aus den genäherten Elementen zu bestimmen.

Durch die eben vorgenommene Umstellung wird erreicht, dass das in die runde Klammer eingeschlossene Hauptglied in allen folgenden Hypothesen unverändert bleibt.

Eine vollständige Zusammenstellung der unter diesen Umständen anzuwendenden Formeln, würde nur auf eine Wiederholung früherer Zusammenstellungen hinauslaufen; ich kann mich derselben daher füglich entschlagen.

§. 14.

Bahnbestimmung eines Kometen.

Im §. 7 wurde nachgewiesen, dass bei Bahnbestimmungen von Kometen aus längeren Intervallen, die Glieder höherer Ordnung leicht so bedeutend werden können, dass ohne ihre Berücksichtigung die Rechnung zu keinem befriedigenden Resultate führen würde. Da man indess bei Kometen eine erste Bahnbestimmung nur ganz ausnahmsweise länger als 8 bis 10 Tage aufschieben wird, büssen diese Glieder natürlich viel von ihrer Bedeutung ein, wozu noch kommt, dass für nicht allzu ungleiche Zwischenzeiten der Coëfficient des $\left(\frac{d r_2}{d \theta}\right)$ enthaltenden, von uns als II bezeichneten Ausdruckes schon an und für sich einen geringen Werth hat, überdies aber mindestens die nicht kurz periodischen Kometen in der Regel bei wahren Anomalien entdeckt werden, in denen $\left(\frac{d r_2}{d \theta}\right)$ selbst nicht in seinem Maximum steht, das bei Kometen für $v = \pm 36°8$ eintritt. Abgesehen also von einem Zusammentreffen vieler, selten ungünstiger Umstände wird man auch bei einer ersten Bahnbestimmung eines Kometen ausreichen, wenn man setzt:

$$P'_m = \frac{\theta_1 \theta_3}{6 \theta_2} g_1 \sin(G_1 - Q_m) \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} + 0\cdot 1 \theta_2^2 \left(\frac{1}{R_2^5} - \frac{1}{r_2^5} \right) \right] =$$

$$= \frac{\theta_1 \theta_3}{6 \theta_2} g_1 \sin(G_1 - Q_m) \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3} \right] \left[1 + \frac{0\cdot 1 \theta_2^2}{R_2^3} + \frac{0\cdot 1 \theta_2^2}{r_2^3} \right].$$

Das Glied mit r_2^5 wurde hier deshalb mitgenommen, weil es bei Kometen nicht selten einen merkbaren Werth erreicht.

Bei so kurzen Zwischenzeiten wie sie hier in Betracht kommen, kann man sich die Berechnung von g_1 und G_1 auch noch erleichtern. Nach §. 5 ist nämlich:

$$g_1 \sin\left(G_1 - \frac{L_3 + L_1}{2}\right) = [(\theta_2 + \theta_3) R_3 - (\theta_1 + \theta_2) R_1] \sin \frac{L_3 - L_1}{2}$$

$$g_1 \cos\left(G_1 - \frac{L_3 + L_1}{2}\right) = [(\theta_2 + \theta_3) R_3 + (\theta_1 + \theta_2) R_1] \cos \frac{L_3 - L_1}{2}.$$

Darin kann man nun unbedenklich $\sqrt{R_1 R_3}$ statt R_1 und R_3 setzen und erhält so zunächst:

$$g_1 \sin\left(G_1 - \frac{L_3 + L_1}{2}\right) = (\theta_3 - \theta_1) \sqrt{R_1 R_3} \sin \frac{1}{2}(L_3 - L_1)$$

$$g_1 \cos\left(G_1 - \frac{L_3 + L_1}{2}\right) = \quad 3\theta_2 \sqrt{R_1 R_3} \cos \frac{1}{2}(L_3 - L_1)$$

$$\operatorname{tg}\left(G_1 - \frac{L_3 + L_1}{2}\right) = \frac{\theta_3 - \theta_1}{3\theta_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(L_3 - L_1).$$

Da $\frac{1}{2}(L_3-L_1)$ selbst klein und $3\theta_2$ vielfach grösser ist als $\theta_3-\theta_1$, ist $G_1-\frac{L_3+L_1}{2}$, wie dies auch unsere Tabelle im §. 5 bestätigt, jedenfalls so klein, dass man die Tangente desselben mit dem Bogen und den Cosinus mit 1 vertauschen kann, überdies aber auch statt der Tangente von $\frac{L_3-L_1}{2}$ den Bogen setzen darf. Dann ist sehr einfach:

$$G_1 = \frac{L_3+L_1}{2} + \frac{\theta_3-\theta_1}{6\theta_2}(L_3-L_1) \doteq \frac{L_3+L_1}{2} + \frac{\theta_3-\theta_1}{6}$$

$$g_1 = 3\theta_2\sqrt{R_1 R_3}\cos\frac{1}{2}(L_3-L_1).$$

Durch diese Kürzung treten selbst bei einem Intervalle von 30 Tagen noch keine bedeutenden Fehler ein. Nur zur Zeit der Äquinoctien ($v = 90°$ und $v = 270°$), wo sie ihr Maximum erreichen, werden sie etwas fühlbarer; zur Zeit der Solstitien verschwinden sie ganz.

Nach dieser Methode würde die Ermittelung einer Kometenbahn die Durchrechnung folgender Formelsysteme erheischen, die ich vollständig ansetze, um ein klares Bild über die zu leistende Arbeit zu gewinnen.

I.

$$\theta_1 = k(t_3-t_2) \qquad \theta_2 = k(t_3-t_1) \qquad \theta_3 = k(t_2-t_1) \qquad \log k = 8\cdot 235\,581$$

$$\mu_1 = \frac{1}{6}(\theta_1+\theta_2)\theta_3 \qquad \mu_3 = \frac{1}{6}(\theta_2+\theta_3)\theta_1$$

Probe:

$$\mu_3-\mu_1 = \frac{1}{6}\theta_2(\theta_3-\theta_1).$$

II.

$$q_1\sin(Q_1-\lambda_2) = \sin(\lambda_2-\lambda_3)$$
$$q_1\cos(Q_1-\lambda_2) = -\cos(\lambda_2-\lambda_3) + \operatorname{tg}\beta_3\operatorname{ctg}\beta_2$$
$$q_2\sin(Q_2-\lambda_1) = \sin(\lambda_1-\lambda_3)$$
$$q_2\cos(Q_2-\lambda_1) = -\cos(\lambda_1-\lambda_3) + \operatorname{tg}\beta_3\operatorname{ctg}\beta_1$$
$$q_3\sin(Q_3-\lambda_2) = \sin(\lambda_1-\lambda_2)$$
$$q_3\cos(Q_3-\lambda_2) = +\cos(\lambda_1-\lambda_2) - \operatorname{tg}\beta_1\operatorname{ctg}\beta_2$$

Probe:

$$q_1 q_3\sin(Q_1-Q_3) = q_2 q_3\sin(Q_2-Q_3) = q_1 q_2\sin(Q_1-Q_2)\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{ctg}\beta_3.$$

III.

$$G_1 = \frac{L_3+L_1}{2} + \frac{K}{6}(\theta_3-\theta_1) \qquad \log\left(\frac{K}{6}\right)'' = 4\cdot 536274$$

$$\gamma = \frac{q_2\sqrt{R_1 R_3}\cos\frac{1}{2}(L_3-L_1)}{2\sin(Q_1-Q_3)}$$

$$W_2 = \frac{\theta_1}{q_1}\cdot\frac{\theta_3}{q_3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\sin\beta_2}\sin(G_1-Q_2)\,\gamma$$

$$\cos\psi_2 = \cos\beta_2\cos(\lambda_2-L_2)$$

$$B_2 = R_2\sin\psi_2 \qquad f_2 = R_2\cos\psi_2$$

IV.

$$\rho_2 = W_2\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)\left(1+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3}+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{\rho_2 - f_2}{B_2}$$

$$r_2 = B_2 \sec\vartheta_2$$

V.

$$T = \gamma\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)\left(1+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3}+\frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)\cdot\frac{\theta_2}{q_2}$$

$$\left(1+\frac{\mu_1}{r_2^3}\right)\rho_1' = \frac{\theta_3}{q_3}\,T\sin(G_1 - Q_1)$$

$$\left(1+\frac{\mu_3}{r_2^3}\right)\rho_3' = \frac{\theta_1}{q_1}\,T\sin(G_1 - Q_3).$$

Aus ρ_1' und ρ_3' werden nun auf die bekannte Art parabolische Elemente abgeleitet. Ist man dabei nach der Berechnung der Gleichungssysteme VII und VIII des §. 9 bis zu den Argumenten der Breiten u_1 und u_3 vorgedrungen, so liefert eine gute Probe:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\sin\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{r_3 - r_1}$$

$$s_1 = \frac{r_3 - r_1}{\cos\xi} = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\sin\frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{\sin\xi}$$

$$s_2 = \frac{2\theta_2}{\sqrt{r_1 + r_3}}\,\mu.$$

μ ist der bekannten Encke'schen Tafel zu entnehmen.

Lassen sich die Beobachtungen durch eine Parabel wiedergeben, so muss $s_1 = s_2$ sein.

Die Auflösung der Gleichung IV ist indirect, aber sehr einfach. In Bezug auf die erste Annahme von r_2 ist zu bemerken, dass W_2 und $\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$ gleichbezeichnet sein müssen, woraus man sofort erkennt, ob $r_2 \lesseqgtr R_2$ sei, und dass, wenn trotz einer nicht unerheblichen geocentrischen Bewegung, dieselbe sehr nahe in einem grössten Kreise vor sich ging, d. h. $Q_3 - Q_1$ sehr klein, und in Folge dessen W_2 sehr gross wird, r_2 nur wenig von R_2 abweichen kann. In einem solchen Falle lässt sich ρ_2 aus den obigen Gleichungen nur sehr unsicher bestimmen, und es überträgt sich diese Unsicherheit auch auf ρ_1' und ρ_3'. Es ist dann vortheilhafter, von r_2 als Unbekannter auszugehen, und die Gleichungen so zu stellen:

IV.*

$$\cos\vartheta_2 = \frac{B_2}{r_2}$$

$$\rho_2 = f_2 + r_2\sin\vartheta_2$$

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{R_2^3} - \frac{\rho_2}{W_2}\left(1 - \frac{0\cdot 1\theta_2^2}{R_2^3} - \frac{0\cdot 1\theta_2^2}{r_2^3}\right)$$

V*.

$$T' = \frac{\theta_2}{q_2} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1 \sin (G_1 - Q_2)} \cdot \rho_2$$

$$\left(1 + \frac{\mu_1}{r_2^3}\right) \rho_1' = \frac{q_1}{\theta_1} \cdot T' \sin (G_1 - Q_1)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_3}{r_2^3}\right) \rho_3' = \frac{q_3}{\theta_3} \cdot T' \sin (G_1 - Q_3).$$

Als Ausgangswerth für r_2 ist jetzt $r_2 = 1$ anzunehmen.

Nach einer Durchsicht dieser Formeln wird man die Eingangs aufgestellte Behauptung kaum unberechtigt finden, dass die Berechnung der geocentrischen Distanzen nach ihnen nicht weitläufiger sei, als nach der Methode von Olbers. Die Vorarbeiten dürften in beiden Methoden nahe dieselben sein: die indirecte Auflösung der Gleichung zur Ermittelung von r_2 ist aber entschiedan einfacher.

Zu Gunsten der hier entwickelten Methode lässt sich weiter noch anführen, dass man schon im Verlaufe der Rechnung erkennen kann, ob sich die Beobachtungen in eine Parabel fügen. Sobald man nämlich die Argumente der Breite u_1 und u_3 gefunden, kann man die Sehne rechnen einerseits aus:

$$s^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos (u_3 - u_1) = (r_3 - r_1)^2 + 4r_1 r_3 \sin^2 \frac{1}{2} (u_3 - u_1)$$

andererseits muss sie bei parabolischer Bewegung der Euler'schen (Lambert'schen) Gleichung genügen:

$$(r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}} = 6\theta_2.$$

Die Übereinstimmung beider Werthe von s liefert eine sehr durchgreifende Controlle der bisherigen Rechnungen und wurde deshalb oben als Probegleichung angeführt.

Die eben auseinandergesetzte Methode ist indess **nicht** anwendbar, wenn der durch die beiden äussersten Orte gelegte grösste Kreis durch den mittleren Sonnenort hindurchgeht. Doch ist dann, wie im §. 6 gezeigt wurde, die Bahnbestimmung nur so lange unmöglich, als man die Excentricität unbestimmt lässt. Nimmt man für sie einen bestimmten Werth an, z. B. wie bei ersten Bahnberechnungen von Kometen, die Einheit, so wird die Bahn bestimmbar, und bildet den sogenannten Ausnahmefall, über dessen Wesen noch immer manche unklare Vorstellungen herrschen. Wir wollen ihn deshalb zum Schlusse etwas eingehender behandeln, vorher aber noch bemerken, dass man das Eintreten desselben sofort dadurch erkennt, dass die Hilfsgrössen Q_1 und Q_3, L_2 oder $180 + L_2$ sehr nahe gleich werden.

§. 15.

Besprechung des sogenannten Ausnahmefalles.

Eliminirt man aus den beiden letzten unserer Grundgleichungen A des §. 2 die Grösse ρ_2', so erhält man:

$$n_1 \rho_1' q_3 \sin (Q_3 - \text{II}) - n_3 \rho_3' q_1 \sin (Q_1 - \text{II}) = n_1 R_1 \sin (L_1 - \text{II}) - n_2 R_2 \sin (L_2 - \text{II}) + n_3 R_3 \sin (L_3 - \text{II})$$

wo alle Bezeichnungen die frühere Bedeutung haben, und II einen völlig willkürlichen Winkel vorstellt.

Nennt man den Ausdruck rechter Hand, Kürze halber für den Augenblick E, und eliminirt man aus demselben das Glied mit $\sin (L_3 - \text{II})$ mittelst der bekannten Gleichung:

$$N_1 R_1 \sin (L_1 - \text{II}) - N_2 R_2 \sin (L_2 - \text{II}) + N_3 R_3 \sin (L_3 - \text{II}) = 0,$$

so erhält man:

$$E = n_3 \left[\left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) R_1 \sin (L_1 - \text{II}) - \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3} \right) R_2 \sin (L_2 - \text{II}) \right] =$$

$$= \frac{\theta_1 \theta_2}{6\theta_3} n_3 \left[(\theta_3 - \theta_1) R_1 \sin (L_1 - \text{II}) + (\theta_2 + \theta_3) R_2 \sin (L_2 - \text{II}) \right] \left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right].$$

Zum Zusammenziehen dieses Ausdruckes bedienen wir uns der Hilfsgrössen:

$$g \sin(G - L_2) = -(\theta_3 - \theta_1) R_1 \sin(L_2 - L_1)$$

$$g \cos(G - L_2) = +(\theta_3 - \theta_1) R_1 \cos(L_2 - L_1) + (\theta_3 + \theta_2) R_2.$$

Er lautet dann:

$$E = \frac{\theta_1 \theta_2}{6\theta_3} \cdot n_3 . g \sin(G - \Pi) \left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right].$$

Da E eine Grösse dritter Ordnung ist, und blos Zwischenzeiten von wenigen Tagen in Betracht gezogen werden, können wir die Ausdrücke für die Hilfsgrössen wesentlich vereinfachen, indem wir alle darin vorkommenden Sinusse mit dem Bogen und die Cosinusse mit Eins vertauschen, sowie mit Rücksicht darauf, dass der Coëfficient von R_1 bedeutend kleiner ist als der von R_2 auch R_2 statt R_1 substituiren. Man hat dann einfach:

$$g = 3\theta_3 R_2$$

$$G = L_2 - \frac{\theta_3 - \theta_1}{3\theta_3} (L_2 - L_1) \doteq L_2 - \frac{1}{3} (\theta_3 - \theta_1).$$

Führen wir dies in E ein, und kürzen wir unter Einem noch $\frac{n_1}{n_3}$, welches Verhältniss unter allen Combinationen am Genauesten durch $\frac{\theta_1}{\theta_3}$ wiedergegeben wird, in dieses ab, so nimmt unsere obige Gleichung die Gestalt an:

$$\rho_3' = \frac{\theta_1 q_3 \sin(Q_3 - \Pi)}{\theta_3 q_1 \sin(Q_1 - \Pi)} \rho_1' - \frac{\theta_1 \theta_2 R_2 \sin(G - \Pi)}{2 q_1 \sin(Q_1 - \Pi)} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)$$

$$= M \rho_1' + m$$

Ist nun G nicht nahe gleich Q_1, so kann man annehmen:

$$\Pi = G$$

und erhält die einfache Relation:

$$\rho_3' = \frac{\theta_1 q_3 \sin(Q_3 - G)}{\theta_3 q_1 \sin(Q_1 - G)} \rho_1' = M \rho_1'$$

$$G = L_2 - \frac{K}{3} (\theta_3 - \theta_1) \qquad \log \left(\frac{K}{3}\right)'' = 4 \cdot 837304.$$

Anstatt $\Pi = G$ setzt man stets $\Pi = L_2$; dann ist aber m streng genommen nicht mehr gleich Null, sondern:

$$m = \frac{\theta_1 \theta_2 (\theta_3 - \theta_1) R_1 \sin(L_2 - L_1)}{6\theta_3 q_1 \sin(Q_1 - L_2)} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) \doteq \frac{\theta_1 \theta_2 (\theta_3 - \theta_1)}{6 q_1 \sin(Q_1 - L_2)} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right).$$

Dies ist freilich nur eine kleine Grösse zweiter Ordnung und solche haben wir bei $\frac{n_1}{n_3}$ bereits weggelassen; es hat daher die Vernachlässigung derselben wenig zu bedeuten. Trotzdem dürfte es sich bei sehr ungleichen Zwischenzeiten immerhin lohnen, sie durch Anbringen der oben entwickelten mühelosen Correction an L_2 zu berücksichtigen.

Da Q_1 und Q_3 bei kurzen Intervallen nie stark von einander abweichen können, wird der Quotient:

$$\frac{\sin(Q_3 - \Pi)}{\sin(Q_1 - \Pi)}$$

durch die Wahl von Π nur ganz unmerklich beeinflusst, wenn man es nur nicht allzunahe an $\underset{\sim}{Q}_1$ und $\underset{\sim}{Q}_3$ annimmt, und M stets nur sehr wenig abweichen von:

$$M_0 = \frac{\theta_1}{\theta_3} \cdot \frac{q_3}{q_1}.$$

Oppolzer bestimmt daher die Genauigkeit mit der man M bei verschiedenen Annahmen über Π erhält unrichtig, und verwirft dem zu Folge Olbers' Methode der Bahnbestimmung schon unter Verhältnissen, wo sie, wie die tägliche Erfahrung lehrt, stets noch sehr gute Resultate gegeben hat. Es kommen überhaupt in seinem Lehrbuche gerade bei der Behandlung des Ausnahmefalles mehrfache Versehen vor.

Nähern sich $\underset{\sim}{Q}_1$ und $\underset{\sim}{Q}_3$ sehr erheblich der mittleren Sonnenlänge L_2 (oder $180+L_2$) und damit auch G, welches von L_2 nur ganz unbedeutend abweicht, dann werden alle drei in M und m vorkommenden Bogen: $\underset{\sim}{Q}_3-\Pi$, $\underset{\sim}{Q}_1-\Pi$ und $G-\Pi$ nahe gleich und die Sinusse derselben laufen einander stets sehr nahe parallel. Für jeden Werth von Π, welcher den einen dieser sehr klein macht, werden es gleichzeitig auch die übrigen; es erscheinen daher dann die beiden Quotienten: $\frac{\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)}{\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)}$ und $\frac{\sin(G-\Pi)}{\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)}$ nahezu in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, welche in diesem Falle für keinen beider eine sichere Werthbestimmung zulässt. Dies bedingt den sogenannten Ausnahmefall.

Bei dieser Sachlage ist es jedenfalls das Zweckmässigste, Π so zu wählen, dass $\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)$ und $\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)$ möglichst gross werden, weil dann die durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler bedingte Unsicherheit von $\underset{\sim}{Q}_1$ und $\underset{\sim}{Q}_3$ den wenigst schädlichen Einfluss ansübt. Dies geschieht für $\underset{\sim}{Q}_1-\Pi = 90°$, oder $\underset{\sim}{Q}_3-\Pi = 90°$ oder auch, wenn man beiden $\underset{\sim}{Q}$ gerecht werden will, für $\frac{\underset{\sim}{Q}_1+\underset{\sim}{Q}_3}{2}-\Pi = 90°$. Der letzte Werth liefert:

$$\frac{\sin(\underset{\sim}{Q}_3-\Pi)}{\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)} = 1$$

$$\frac{\sin(G-\Pi)}{\sin(\underset{\sim}{Q}_1-\Pi)} = \frac{\cos\left[G-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{Q}_3+\underset{\sim}{Q}_1)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\underset{\sim}{Q}_3-\underset{\sim}{Q}_1)} = \cos(L_2-\underset{\sim}{Q}_1).$$

Damit wird:

$$\rho_3' = \frac{\theta_1 q_3}{\theta_3 q_1}\rho_1' + \frac{\theta_1\theta_2 R_2}{2q_1}\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)\cos(L_2-\underset{\sim}{Q}_1)$$
$$= M_0\rho_1' + m_0.$$

Bei kurzen Zwischenzeiten ist im letzten Gliede rechter Hand $\theta_1\theta_2 : q_1$ eine Grösse erster Ordnung, die in der Regel durch den Factor $\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}$ noch wesentlich verkleinert wird, weil wie im §. 6 nachgewiesen wurde, beim Ausnahmefalle r_2 sich nur ganz ausnahmsweise erheblich von R_2 unterscheidet. Ungünstig hingegen ist der Umstand, dass die geocentrischen Distanzen zuweilen sehr klein werden können, was die Bedeutung von Vernachlässigungen erhöht. Immerhin aber wird die Annahme:

$$\rho_3' = M_0\rho_1'$$

genügen, um mittelst Olbers' Methode so genäherte Werthe für r_1 und r_3 zu erhalten, dass, wenn man aus ihnen $\log r_2$ berechnet nach der Formel:

$$\log r_2 = \log r_1 + \frac{\theta_3}{\theta_2}(\log r_3 - \log r_1) =$$

$$= \log r_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2}(\log r_3 - \log r_1)$$

damit ein neuer, wesentlich verbesserter Werth von M:

$$M = M_0 + \frac{m_0}{\rho_1'}$$

gebildet werden kann, mit dem die Rechnung zu wiederholen ist.

Übrigens kann man sich durch einen Kunstgriff, den ich vor einigen Jahren in einer Abhandlung [1] über die Bestimmung von M angegeben habe, gleich anfangs noch einen genäherteren Werth für M verschaffen, und dadurch nicht selten die Wiederholung der Rechnung vermeiden. Er beruht im Wesentlichen auf Folgendem.

Setzt man beim Ausnahmefalle wie oben $\Pi = \frac{Q_1 + Q_3}{2} - 90°$, so wird der in m vorkommende Quotient:

$$\frac{\sin(G - \Pi)}{\sin(Q_1 - \Pi)} \doteq \pm 1.$$

Setzt man hingegen: $\Pi = Q_1 + \alpha$, so wird:

$$M = M_0 \frac{\sin[\alpha + (Q_1 - Q_3)]}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin(G - \Pi)}{\sin(Q_1 - \Pi)} = \frac{\sin(\alpha - G + Q_1)}{\sin\alpha}.$$

Wählt man nun α so gross, dass der Quotient $\frac{\sin(\alpha + Q_1 - Q_3)}{\sin\alpha}$ durch die Unsicherheit von $Q_1 - Q_3$ nicht mehr allzusehr beeinflusst, und $\sin(\alpha - G + Q_1)$ numerisch kleiner als $\sin\alpha$ wird, so wird auch m numerisch kleiner als m_0 und in Folge dessen:

$$M = M_0 \frac{\sin(\alpha + Q_1 - Q_3)}{\sin\alpha} \doteq M_0 [1 + (Q_1 - Q_3) \operatorname{ctg}\alpha]$$

ein genäherterer Werth für M sein, als M_0, wenn man festhalten will an der Relation:

$$\rho_3' = M\rho_1'.$$

Der Werth von α, welcher das beste Resultat geben würde, lässt sich natürlich im Allgemeinen nicht festsetzen. Er darf jedoch nicht gar zu gross, andererseits auch nicht gar zu klein genommen werden, denn im ersteren Falle würde $\frac{\sin(\alpha - G + Q_1)}{\sin\alpha}$ wieder sehr nahe gleich Eins, im letzteren bliebe $\frac{\sin(\alpha + Q_1 - Q_3)}{\sin\alpha}$ noch zu unsicher. Ich habe desshalb vorgeschlagen $\alpha = \pm 10°$ zu nehmen. Dann wird:

$$\log M = \log M_0 \pm \overline{8 \cdot 633321}\, (Q_1 - Q_3),$$

oder bequemer:

$$\log M = \log M_0 \pm 0 \cdot 04\, (Q_1 - Q_3),$$

wo $Q_1 - Q_3$ in Graden auszudrücken ist. Das obere oder untere Zeichen ist zu nehmen, je nachdem:

$$m_0 \gtrless 0,$$

oder da θ_1, θ_2, R_2 und q_1 wesentlich positiv sind, je nachdem:

$$\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \cos(L_2 - Q_1) \gtrless 0.$$

Kann man schon von vornherein angeben, ob $R_2 \gtrless r_2$, was häufig genug eintritt, so ist das Zeichen des vorstehenden Ausdruckes bekannt, und damit auch nach welcher Richtung M_0 zu verbessern ist. Das

[1] E. Weiss, Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. Bd. XCII, Abth. II, S. 1456 ff.

so erhaltene M ist dann der weiteren Rechnung zu Grunde zu legen. Ist man jedoch nicht in der Lage zu entscheiden ob $R_2 \gtrless r_2$, so ist es wohl am einfachsten M_0 als Anfangswerth für M anzunehmen.

Übrigens wird es sich auch empfehlen bei der Bahnberechnung nicht von Olbers M, sondern zunächst von der hier M_0 genannten Grösse auszugehen, und diese später durch Hinzufügen von m_0 zu verbessern, wenn $\underset{\sim}{Q}_1$ und $\underset{\sim}{Q}_3$ zwar schon so weit von L_2 abweichen, dass man vom Vorhandensein des Ausnahmefalles eigentlich nicht mehr sprechen kann, diese Grössen aber sich nur sehr unsicher bestimmen lassen. Dies ist hauptsächlich dann der Fall, wenn die Breiten des Kometen einander sehr nahe gleich sind, was in der Regel nur bei geringen Neigungen und in Folge dessen bei kleinen Breiten vorzukommen pflegt, die schon an und für sich einer Bahnbestimmung nicht günstig sind. Geringe Neigungen treffen wir aber fast ausschliesslich bei Kometen von kurzer Periode an, und in der That begegnet man beim Durchblättern der »Astronomischen Nachrichten« der Klage, dass sich eine befriedigende Bahn nur schwierig und erst nach mehrfachen Variationen von M habe herstellen lassen, besonders häufig bei solchen Kometen, die sich später als periodische entpuppten. Aus der neueren Zeit bot ein sehr instructives Beispiel dieser Art der Komet 1886 VII (Finlay) dar.